ऐच्छिक गणित

कक्षा - 9

लेखकहरू

दिनेश वाग्ले

मञ्जु मग्राती बस्याल

रमेशप्रसाद अवस्थी

रामकृष्ण लामिछाने

नेपाल सरकार

शिक्षा मन्त्रालय

पाठ्यक्रम विकास केन्द्र

सानोठिमी, भक्तपुर

प्रकाशक : नेपाल सरकार
शिक्षा मन्त्रालय
पाठ्यक्रम विकास केन्द्र
सानोठिमी, भक्तपुर

संस्करण : वि.सं. २०७४

पाठ्यपुस्तकका सम्बन्धमा कुनै सुझाव भए पाठ्यक्रम विकास केन्द्र, सम्पादन तथा प्रकाशन शाखामा पठाइदिनुहुन अनुरोध छ ।

वेबसाइट : www.moecdc.gov.np
फोन : ०१-६६३०५८८, ०१-५६३९१२२, ०१-६६३००८८, ०१-६६३५०४६
फ्याक्स : ०१-६६३०७९७
नोटिस बोर्ड : १६१८०१६६३०७९७

हाम्रो भनाइ

शिक्षालाई उद्देश्यमूलक, व्यावहारिक, समसामयिक र रोजगारमूलक बनाउन विभिन्न समयमा पाठ्यक्रम, पाठ्यपुस्तक विकास तथा परिमार्जन गर्ने कार्यलाई निरन्तरता दिइँदै आएको छ । विद्यार्थीहरूमा राष्ट्र, राष्ट्रिय एकता र लोकतान्त्रिक संस्कारको भावना पैदा गराई नैतिकवान् अनुशासित र स्वावलम्बी, सिर्जनशील, चिन्तनशील भई समावेशी समाज निर्माणमा योगदान दिन सक्ने, भाषिक तथा गणितीय सिपका साथै विज्ञान, सूचना तथा सञ्चार प्रविधि, वातावरण, स्वास्थ्य र जनसङ्ख्या सम्बन्धी ज्ञान र जीवनोपयोगी सिपको विकास गराउनु जरुरी छ । उनीहरूमा कला र सौन्दर्य, मानवीय मूल्य मान्यता, आदर्श र वैशिष्ट्यहरूको संरक्षण, संवर्धनप्रतिको भाव जगाउन आवश्यक छ । समतामूलक समाजकको निर्माणमा सहयोग पुऱ्याउन उनीहरूमा विभिन्न जातजाति, लिङ्ग, अपाङ्गता, भाषा, धर्म, संस्कृति र क्षेत्रप्रति समभाव जगाउनु र मानव अधिकार तथा सामाजिक मूल्य मान्यताप्रति सचेत भई जिम्मेवारीपूर्ण आचरण विकास गराउनु पनि आजको आवश्यकता बनेको छ । विद्यार्थीको विशेष क्षमता उजागर गर्न ऐच्छिक विषयहरूको पनि व्यवस्था गरिनुपर्छ । यही आवश्यकता पूर्तिका लागि ऐच्छक विषय सम्बन्धी माध्यमिक शिक्षा पाठ्यक्रम, २०७३, शिक्षा सम्बन्धी विभिन्न आयोगका सुझाव, शिक्षक, विद्यार्थी तथा अभिभावकलगायत शिक्षासँग सम्बद्ध विभिन्न व्यक्ति सम्मिलित गोष्ठी र अन्तरक्रियाका निष्कर्षका साथै विभिन्न पृष्ठपोषणसमेतलाई आधारमानी यो पाठ्यपुस्तक तयार पारिएको हो ।

पाठ्यपुस्तकलाई यस स्वरूपमा ल्याउने कार्यमा केन्द्रका कार्यकारी निर्देशक श्री कृष्णप्रसाद काप्री, उपनिर्देशक दुर्गा कँडेल, प्रा.डा. राममान श्रेष्ठ, सहप्राध्यापक लक्ष्मीनारायण यादव, सहप्राध्यापक वैकुण्ठप्रसाद खनाल, कृष्णप्रसाद पोखरेल, गोमा श्रेष्ठ, राजकुमार माथेमा, अनिरुद्रप्रसाद न्यौपानेलगायतको विशेष योगदान रहेको छ । यस पाठ्यपुस्तकको विषयवस्तु सम्पादन हरीश पन्त, भाषा सम्पादन चिनाकुमारी निरौला, चित्राङ्कन, टाइप सेटिङ र लेआउट डिजाइन जयराम कुइँकेलबाट भएको हो । यस पाठ्यपुस्तकको विकास तथा परिमार्जन कार्यमा संलग्न सबैप्रति पाठ्यक्रम विकास केन्द्र धन्यवाद प्रकट गर्दछ ।

पाठ्यपुस्तकलाई शिक्षण सिकाइको महत्त्वपूर्ण साधनका रूपमा लिइन्छ। यसबाट विद्यार्थीले पाठ्यक्रमद्वारा लक्षित सक्षमता हासिल गर्न मदत पुग्ने अपेक्षा गरिएको छ । यस पाठ्यपुस्तकलाई सकेसम्म क्रियाकलापमुखी, रुचिकर र सिकारु केन्द्रित बनाउने प्रयत्न गरिएको छ । पाठ्यपुस्तकलाई अझै परिस्कृत पार्नका लागि शिक्षक, विद्यार्थी, अभिभावक, बुद्धिजीवी एवम् सम्पूर्ण पाठकहरूको समेत महत्त्वपूर्ण भूमिका रहने हुँदा सम्बद्ध सबैको रचनात्मक सुझावका लागि पाठ्यक्रम विकास केन्द्र हार्दिक अनुरोध गर्दछ ।

पाठ्यक्रम विकास केन्द्र

वि.सं. २०७४

विषय सूची

एकाइ 1

बीज गणित (Algebra)

1.1 सम्बन्ध र फलन (Relation and Function)

1.1.0 पुनरावलोकन (Review)

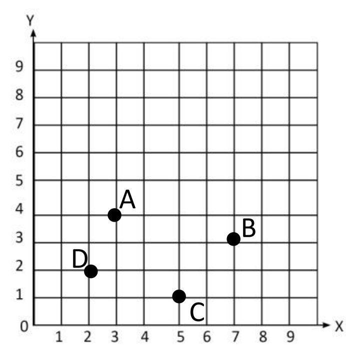
(a) तपाईंसँग भएका रु. 2 का 20 ओटा सिक्काहरू दुई जना साथीहरू 'क' र 'ख' लाई कति कति ओटा कसरी दिन सक्नुहुन्छ ? छलफल गरी तल दिइएको तालिका भर्नुहोस् :

'क'	1	2	3	4	5	7	.....	....
'ख'	......	....	....	....	....	....	11	12

(b) समीकरण $2x + y = 18$ मान्य हुने गरी खाली ठाउँमा भर्नुहोस् :

x	0	....	......	......	......	....	....
y	18	....	....	....	....	....	....

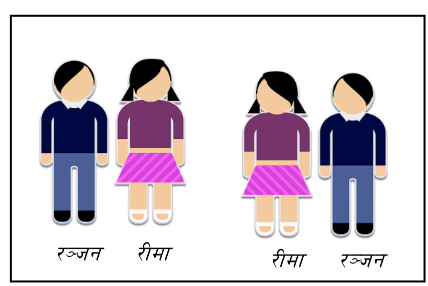
(c) दिइएको लेखाचित्रबाट बिन्दुहरू A, B, C, र D का निर्देशाङ्कहरू लेख्नुहोस् । उक्त बिन्दुलाई क्रमैसँग जोड्दा केको आकृति बन्छ ? उल्लेख गर्नुहोस् ।



चित्र न. 1.1

1.1.1 क्रमजोडा (ordered pair)

चित्रमा, रीमा र रञ्जन एउटा पङ्तिमा उभिएको अवस्था देखाइएको छ । ती दुई अवस्थाहरूमा के भिन्नता पाउनुभयो ? छलफल गर्नुहोस् ।



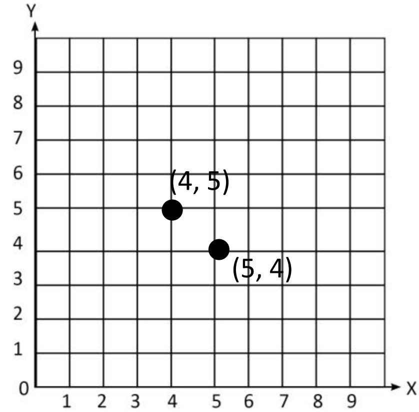
चित्र न. 1.2

समूह A मा दुई ओटा सदस्यहरू 4 र 5 छन् । यिनीहरूलाई सूचीकरण विधिद्वारा लेख्दा A = {4,5} अथवा A = {5, 4} लेख्न सकिन्छ ? के (4, 5) र (5, 4) ले एउटै बिन्दुलाई जनाउँछ लेखाचित्रमा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

(4, 5) र (5, 4) मा 4 र 5 लाई निश्चित क्रममा राखिएका छन् ।

(4, 5) मा पहिले आउने सदस्य (antecedent) 4 र दोस्रो सदस्य (consequence) 5 छ ।

(5, 4) मा पहिले आउने सदस्य (antecedent) 5 र दोस्रो सदस्य (consequence) 4 छ ।



चित्र नं. 1.3

त्यसैले अल्पविराम (comma) चिह्न (,) ले छुट्याई सानोकोष्ठ (paranthesis) भित्र एउटै विशेषता भएका जोडी सदस्यहरूलाई उचित क्रममा राखिएको छ भने उक्त सङ्ख्यासहितको क्रमलाई क्रम जोडा भनिन्छ ।

दुई ओटा क्रमजोडाहरू बराबर हुन तिनीहरूका क्रमागत सदस्यहरू बराबर हुनुपर्छ ।

यदि (a, b) = (c, d) भए a = c र b = d हुन्छ, उदाहरणका लागि $\left(6, \frac{18}{2}\right) = \left(\frac{12}{2}, 9\right)$

तल दिइएका उदाहरणहरूबारे कक्षामा छलफल गर्नुहोस् :

उदाहरण 1

तल दिइएका अवस्थामा x र y को मान पत्ता लगाउनुहोस् :

(a) $(x, 8) = (4, y)$

(b) $(x + 2, 4) = (5, 2x + y)$

(c) $\left(\frac{3x}{4}, 6\right) = \left(9, \frac{y}{6}\right)$

समाधान

(a) $(x, 8) = (4, y)$

दुवै बराबर क्रमजोडाहरूमा क्रमागत सदस्यहरू एक आपसमा बराबर हुन्छन् ।

$\therefore x = 4$ र $y = 8$

(b) $(x + 2, 4) = (5, 2x + y)$

क्रमागत सदस्यहरूलाई एक आपसमा बराबर गर्दा,

(i) $x + 2 = 5$

अथवा, $x = 5 - 2$

अथवा, $x = 3$

(ii) $2x + y = 4$

अथवा, $2 \times 3 + y = 4$

अथवा, $6 + y = 4$

अथवा, $y = 4 - 6$

अथवा, $y = -2$

$\therefore x = 3$ र $y = -2$ हुन्छ ।

(c) $\left(\frac{3x}{4}, 6\right) = \left(9, \frac{y}{6}\right)$

क्रमागत सदस्यहरू एकआपसमा बराबर हुने भएकाले

(i) $\frac{3x}{4} = 9$

अथवा, $3x = 9 \times 4$

अथवा, $x = \frac{36}{3}$

अथवा, $x = 12$

(ii) $\frac{y}{6} = 6$

अथवा, $y = 6 \times 6$

अथवा, $y = 36$

$\therefore x = 12$ र $y = 36$

अभ्यास 1.1.1

1. (a) क्रमजोडा सङ्ख्याको परिभाषा दिनुहोस् ।

   (b) क्रमजोडा सङ्ख्याको कुनै एउटा उदाहरण लेख्नुहोस् ।

2. तल दिइएका क्रमजोडाहरूमा कुन कुन बराबर छन् ? कारणसहित उल्लेख गर्नुहोस् ।

   (a) (3, 4) र (4, 3)

   (b) $(2 - 1, 5 + 1)$ र $\left(5 - 4, \frac{12}{2}\right)$

   (c) $(18 \div 3, 4 \times 2)$ र $(2 \times 3, 5 + 2)$

   (d) $(4 + 5, 21 \div 7)$ र $(3 \times 3, 4 - 1)$

3. तल दिइएका अवस्थामा x र y को मान पत्ता लगाउनुहोस् :

   (a) $(x, 4) = (5, y)$

   (b) $(x - 1, y + 2) = (6, 7)$

   (c) $(x - 3, y + 7) = (2, -5)$

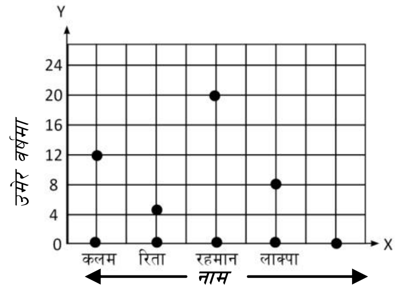
   (d) $(2x - 5, 4) = (9, y + 4)$

   (e) $\left(\frac{x}{3} + 1, y - \frac{2}{3}\right) = \left(\frac{5}{3}, \frac{1}{3}\right)$

4. आफ्नो छिमेकमा रहेका कुनै आठ जनाको नाम र उमेरको क्रमजोडा बनाउनुहोस् ।

1.1.2 कार्टेसियन गुणन (Cartesian product)

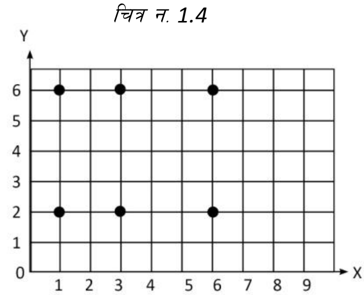
चित्र 1.4 मा दिइएको जानकारीलाई क्रमजोडाका रूपमा लेख्नुहोस्, जहाँ पहिलो सदस्य नाम र दोस्रो सदस्य उमेर (वर्षमा) हुनुपर्छ । त्यस्तै नाम र उमेर (वर्षमा) क्रमशः समूह A र समूह B मान्दा A र B का सदस्यहरू सूचीकरण विधिद्वारा लेख्नुहोस् ।



चित्र नं. 1.4

चित्र 1.5 मा समूह C मा रहेका सदस्यहरू 1, 3 र 6 तथा समूह D मा रहेका सदस्यहरू 2, र 6 लाई समेटेर क्रमजोडा बनाइएको छ । ती क्रमजोडाहरू क्रमशः (1, 2) (1, 6), (3, 2), (3, 6), (6, 2), (6, 6) छन् ।

यी क्रमजोडाहरूको समूह {(1, 2), (1, 6), (3, 2), (3, 6), (6, 2), (6, 6)} तथा यिनीहरूलाई समूहको गुणन {1, 3, 6} x {2, 6} द्वारा लेख्न सकिन्छ ।

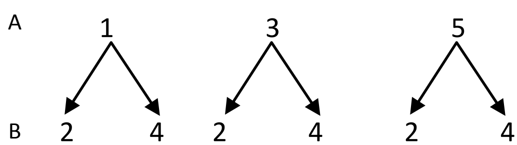


चित्र नं. 1.5

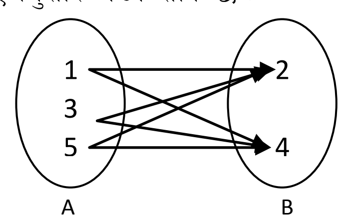
मानौँ समूह A र B मा निश्चित सदस्यहरू छन् । पहिलो सदस्य A बाट र दोस्रो सदस्य B बाट लिएर बनाएका सम्पूर्ण क्रमजोडाहरूको समूहलाई A र B को कार्टेसियन गुणनफल भनिन्छ । यसलाई सङ्केतमा, $A \times B = \{(a,b): a \in A, b \in B\}$ लेखिन्छ ।

A x B लाई पढ्दा समूह A कार्टेसियन गुणनफल (cartesian product) समूह B पढिन्छ ।

यदि A = {1, 3, 5} र B = {2, 4} भए A x B लाई तल दिइएअनुसार लेख्न सकिन्छ :



चित्र नं. 1.6



चित्र नं. 1.7

$A \times B = \{1, 3, 5\} \times \{2, 4\}$

$= \{(1, 2), (1, 4), (3, 2) (3, 4), (5, 2), (5, 4)\}$

नोट

(a) यदि $A \times B = \phi$ भए $A = \phi$ अथवा $B = \phi$ हुन्छ ।

(b) *यदि, $A \times B = B \times A$ भए $A = B$ हुन्छ ।*

(c) *यदि A र B को गणनात्मकता $n(A)$ र $n(B)$ भए $n(A \times B) = n(A) \times n(B)$ हुन्छ ।*

उदाहरण 1

यदि A = {1, 2} र B = {6 } भए A x B पत्ता लगाउनुहोस् :

समाधान

यहाँ, A = {1, 2} र B = {6}

A x B = {1, 2} x {6}

= {(1, 6), (2, 6)}

उदाहरण 2

यदि A x B = {(2, 4), (2, 5), (2, 6), (3, 4), (3, 5), (3, 6)} भए समूह A र B पत्ता लगाउनुहोस् । साथै n(A), n(B) र n(A x B) पनि पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान

यहाँ, A x B = {(2, 4), (2, 5), (2, 6), (3, 4), (3, 5), (3, 6)}

A = क्रमजोडाका पहिलो सदस्यहरूको समूह

={2, 3}

B = क्रमजोडाका दोस्रो सदस्यहरूको समूह

= {4, 5, 6}

त्यसैले, n(A) = 2, n(B) = 3,

n(A x B) = n(A) x n(B) = 2 x 3 = 6

उदाहरण 3

यदि $A = \{x : x \leq 5, x \in N\}$ र $B = \{x: x^2 - 4 = 0\}$ भए $A \times B$ र $B \times A$ पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान

यहाँ, $A = \{x: x \leq 5, x \in N\}$

$= \{1, 2, 3, 4, 5\}$

$B = \{x : x^2 - 4 = 0\}$

$= \{-2, 2\}$

$\therefore x^2 - 4 = 0$

अथवा, $(x - 2)(x + 2) = 0$

अथवा, $x - 2 = 0, x - 2 = 0$

अथवा, $x = 2, x = -2$

अथवा, $x = \pm 2$

फेरि,

यदि, A x B = {1, 2, 3, 4, 5} x {-2, 2}

= { (1, - 2), (1, 2), (2, -2), (2, 2), (3, -2), (3, 2), (4, -2), (4, 2), (5, - 2),(5, 2)}

$B \times A = \{-2, 2\} \times \{1, 2, 3, 4, 5\}$

$= \{(-2, 1)\ (-2, 2), (-2,3), (-2,4)\ (-2,5), (2,1), (2,2)\ (2, 3), (2, 4), (2, 5)\}$

उदाहरण 4

यदि $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{3, 4, 5\}$ र $C = \{5, 6\}$ भए $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$ हुन्छ भनी प्रमाणित गर्नुहोस् ।

समाधान

यहाँ, $A = \{1, 2, 3,\}$, $B = \{3, 4, 5\}$ र $C = \{5, 6\}$

त्यसैले, $(B \cap C) = \{3, 4,5\} \cap \{5, 6\}$

$= \{5\}$

$A \times (B \cap C) = \{1, 2, 3\} \times \{5\}$

$= \{(1, 5), (2, 5), (3, 5)\}$

फेरि, $A \times B = \{1, 2, 3\} \times \{3, 4, 5\}$

$= \{(1, 3), (1, 4), (1,5), (2,3), (2, 4), (2,5), (3,3), (3,4), (3,5)\}$

$A \times C = \{1, 2, 3\} \times \{5, 6\}$

$= \{(1, 5), (1,6), (2,5), (2,6), (3,5), (3,6)\}$

अब, $(A \times B) \cap (A \times C) = \{(1, 3), (1, 4), (1,5), (2,3), (2, 4), (2,5), (3,3), (3,4), (3,5)\}$

$\cap \{(1, 5), (1,6), (2,5), (2,6), (3,5), (3,6)\}$

$= \{(1, 5), (2, 5), (3, 5)\}$

$\therefore A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$

अभ्यास 1.1.2

1. (a) कार्टेसियन गुणनको परिभाषा लेख्नुहोस् ।

   (b) समूह A र B को गणनात्मकता क्रमशः 3 र 2 छ भने $A \times B$ को गणनात्मकता कति हुन्छ ?

2. (a) यदि $A = \{2, 3\}$ र $B = \{7\}$ भए $A \times B$ पत्ता लगाउनुहोस् ।

   (b) यदि $A = \{2, 3\}$ र $B = \{4, 5, 6\}$ भए $B \times A$ पत्ता लगाउनुहोस् ।

3. (a) यदि $A \times B = \{(a,1), (a, 5), (a, 2), (b, 2), (b, 1), (b, 5)\}$ भए A, B, n(A), n(B), $B \times A$ र $n(B \times A)$ पत्ता लगाउनुहोस् ।

(b) यदि $A \times B = \{(1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 4) (2, 5), (2, 6), (3, 4), (3, 5) (3, 6)\}$ भए A, B, n(A), n(B), B x A र n(B x A) पत्ता लगाउनुहोस् ।

4. (a) यदि $A = \{x : x \leq 4, x \in N\}$ र $B = \{x : x^2 - 5x + 6 = 0\}$ भए A x B र B x A पत्ता लगाउनुहोस् ।

(b) यदि $P = \{2 < x < 7, x \in N\}$ र $Q = \{x : x^2 = 3x\}$ भए P x Q र Q x P पत्ता लगाउनुहोस् ।

5. (a) यदि A = {1, 2}, B ={1,2.3,4} र C = {5, 6} भए $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$ हुन्छ भनी प्रमाणित गर्नुहोस् ।

(b) यदि A = {1, 4}, B = {2, 3,6} र C = {2, 3, 7} भए

(i) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$

(ii) $A \times (B - C) = (A \times B) - (A \times C)$ हुन्छ भनी प्रमाणित गर्नुहोस् ।

6. कुनै दुई जना साथीहरूको नामको पहिलो शब्दलाई समूह M र अन्तिम शब्दलाई N मानी M x N र N x M पत्ता लगाउनुहोस् ।

1.1.3 सम्बन्ध (Relation)

(क) सम्बन्धको परिचय (Introduction to relation)

मानौं, A = विश्वका कुनै 5 ओटा देशहरूको समूह ={नेपाल, भारत, अमेरिका, जापान, चीन}

B = विश्वका कुनै आठ ओटा सहरहरूको समूह = {पेरिस, मेक्सिको, काठमाडौं, लाहोर, वासिङ्टन डि.सी, नयाँ दिल्ली, टोकियो, बेइजिङ} भए समूह A लाई समूह B सँग जोड्ने एउटा शब्द “राजधानी (is capital of)” छ भने त्यो शब्दद्वारा जोडिएका क्रमजोडाहरू के के होलान ? छलफल गर्नुहोस् ।

के उक्त जोडाहरू (काठमाडौं, नेपाल), (नयाँ दिल्ली, भारत), (टोकियो, जापान) (वासिङ्टन डि.सी, अमेरिका) (बेइजिङ, चीन) हुन् ? यी जोडाहरूलाई सूचीकरण विधिद्वारा देखाउँदा कस्तो समूह हुन्छ ?

A x B का कति ओटा क्रमजोडाहरू बन्छन् ? के “राजधानी” शब्दले बनेका क्रमजोडाहरूको समूह A x B को उपसमूह हुन्छ ? छलफल गर्नुहोस् ।

मानौं A र B दुई समूहहरू हुन् । जहाँ $A \neq \phi$ र $B \neq \phi$ छ । A x B को उपसमूह 'R' छ । $(a, b) \in R$ भए “aRb” लाई a को सम्बन्ध b (a is related to b) भनी पढिन्छ ।

उदाहरण 1

यदि A x B = { (1, 2), (1, 3), (1, 4),(2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 2), (3, 3) (3, 4)} भए,

(a) भन्दा कम (is less than) (b) बराबर (is equal to) (c) वर्ग (is square of) र

(d) भन्दा बढी (is greater than) सम्बन्धहरू कुन कुन हुन्, लेख्नुहोस् ।

समाधान

यहाँ, A x B = {(1, 2), (1, 3), (1, 4) (2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 2), (3, 3), (3, 4)}

(a) भन्दा कम सम्बन्ध = { (a, b): a<b}

(is less than) = {(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 4)}

(a) बराबर सम्बन्ध = {(a, b): a = b}

(is equal to) = {(2,2), (3, 3)}

(c) वर्ग सम्बन्ध = {(a, b): a = b^2}

(is square of) = ϕ

(d) भन्दा बढी = {(a, b): a>b}

(is greater than) = {(3, 2)}

(ख) सम्बन्ध जनाउने तरिका (Representation of Relation)

यदि A = {1, 2, 3, 4, 5} र B = {2, 4, 6, 8, 10} भए

A x B = {1, 2, 3, 4, 5} x {2, 4, 6, 8, 10}

= {(1, 2), (1, 4), (1, 6) (1, 8), (1, 10), (2,2), (2, 4), (2, 6), (2, 8), (2, 10), (3, 2), (3, 4) (3, 6) (3, 8), (3, 10), (4, 2), (4, 4) (4, 6), (4, 8), (4, 1o), (5, 2), (5, 4), (5, 6), (5, 8), (5, 10)} हुन्छ ।

यहाँ, A x B को एउटा सम्बन्ध

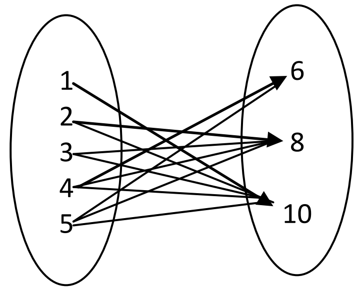
R = { (1, 10), (2, 8), (2, 10), (3, 8), (3, 10), (4, 6), (4, 8), (4, 10), (5, 6), (5, 8), (5, 10)} छ ।

उक्त सम्बन्धलाई तल दिइएअनुसार प्रस्तुत गर्न सकिन्छ :

(i) तालिका विधि (Tabulation method)

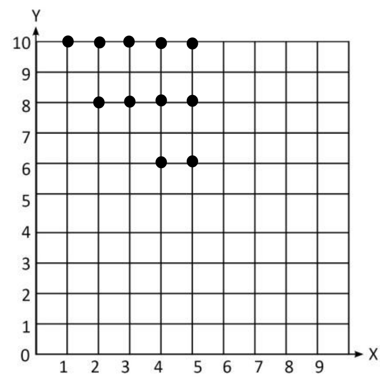
x	1	2	2	3	3	4	4	4	5	5	5
y	10	8	10	8	10	6	8	10	6	8	10

(ii) मिलान चित्र विधि (Mapping -diagram method)



चित्र न. 1.8

(iii) लेखाचित्र विधि (Graphical method)



चित्र न. 1.9

(iv) क्रमजोडाहरूको समूह विधि (set of ordered-pair method):

R = {(1, 10), (2, 8), (2, 10), (3, 8), (4, 6), (4, 8), (4, 10), (5, 6), (5, 8), (5, 10)}

(v) वर्णन वा सूत्र विधि (description or formula method): R = {(x, y): $x + y \geq 10$ }

अभ्यास 1. 1.3 (A)

1. (a) सम्बन्धको परिभाषा उदाहरणसहित लेख्नुहोस् ।

   (b) सम्बन्ध जनाउने तरिकाहरू के के हुन् ? उल्लेख गर्नुहोस् ।

2. यदि A x B = {(1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 4), (2, 5), (2, 6), (3, 4), (3, 5), (3, 6)} भए तल दिइएका सम्बन्धहरू पत्ता लगाउनुहोस् :

   (a) R_1 = {(x, y): $x + y = 6$}   (b) R_2 = {(x,y): $x < y$}   (c) R_3 = {(x, y): $y = x^2$}

3. यदि A = {1, 2, 3} र B = {2, 3, 4} भए A x B बाट तल दिइएअनुसारका सम्बन्धहरू पत्ता लगाउनुहोस् :

(a) भन्दाबढी (is more than)}
(b) बराबर (is equal to)
(c) दुई गुणा (is double of)
(d) आधा (is half of)
(e) वर्ग (is square of)

4. यदि A = {6,7, 8, 10} र B = {2, 4, 6} भए A x B बाट तल दिइएअनुसारका सम्बन्धलाई तलका आधारमा प्रस्तुत गर्नुहोस् :

(i) क्रमजोडाको समूहद्वारा
(ii) मिलान चित्रबाट
(iii) ग्राफबाट
(iv) तालिकाबाट

(a) $R_1 = \{(x, y): x + y < 12, x \in A, x \in B\}$
(b) $R_2 = \{ (x, y): 2x + y > 10, x \in A, y \in B\}$

5. तपाईंको परिवारमा भएका सदस्यहरूको नाम लेख्नुहोस् । प्रत्येक सदस्यका बिचमा के कस्ता सम्बन्धहरू छन् । प्रतिवेदन तयार गरी कक्षाकोठामा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

(ग) सम्बन्धको क्षेत्र र विस्तार क्षेत्र (Domain and Range of a Relation)

यदि कुनै सम्बन्ध R = {(1, 1), (2, 4), (3, 9), (4, 16)} भए 'R' का क्रमजोडाहरू पहिलो र दोस्रो सदस्यहरूका समूह के हुन्छन्, लेख्नुहोस् ।

यदि $R = \{(x, y)\}$ भए x को समूहलाई क्षेत्र र y को समूहलाई विस्तार भनिन्छ । x र y ले क्रमजोडामा पहिलो र दोस्रो सदस्यलाई जनाउँछन् ।

माथिको सम्बन्ध R को क्षेत्र {1, 2, ,3 ,4 } र विस्तार क्षेत्र {1, 4, 9, 16} हो ।

(घ) सम्बन्धको प्रकार (Types of Relation):

मानौँ A x B = {(1, 1), (1, 2),(1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3)} छ ।

(i) रिफ्लेक्सिभ सम्बन्ध (Reflexive Relation):

यहाँ, A x B बाट R_1 = {(1, 1), (2, 2)} लिँदा

उक्त सम्बन्ध R_1 मा आफ्नो सम्बन्ध आफैसँग छ । यस्तो सम्बन्धलाई रिफ्लेक्सिभ सम्बन्ध (Reflexive Relation) भनिन्छ । यसलाई साङ्केतिक रूपमा xRx लेखिन्छ ।

(ii) सिमेट्रिक सम्बन्ध (Symmetric Relation):

फेरि, A x B बाट R_2 = {(1, 2), (2, 1)} लिँदा उक्त सम्बन्धमा पहिलोको सम्बन्ध दोस्रोमा हुँदा दोस्रोको सम्बन्ध पहिलोसँग छ । यस्तो सम्बन्धलाई सिमेट्रिक सम्बन्ध (Symmetric Relation) भनिन्छ । साङ्केतिक रूपमा xRy भए yRx हुन्छ । यदि x = y भए उक्त सम्बन्ध एन्टी सिमेट्रिक (Anti-symmetric) हुन्छ ।

(iii) ट्रान्जिटिभ सम्बन्ध (Transitive Relation)

त्यस्तै, R_3 = {(1, 2), (2, 3), (1, 3)} लिँदा, पहिलोको सम्बन्ध दोस्रोसँग, दोस्रोको सम्बन्ध तेस्रोसँग हुँदा पहिलोको सम्बन्ध तेस्रोसँग पनि हुन्छ । यस्तो सम्बन्धलाई ट्रान्जिटिभ सम्बन्ध (Transitive Relation) भनिन्छ । सङ्केतमा यसलाई aRb, bRc भएमा aRc हुन्छ भनी लेख्न सकिन्छ ।

यदि कुनै सम्बन्ध रिफ्लेक्सिभ (reflesive)*, सिमेट्रिक (symmetric) र ट्रान्जिटिभ (transitive) तिनै ओटै अवस्थामा भए उक्त सम्बन्धलाई समतुल्य सम्बन्ध (equivalence relation) भनिन्छ ।*

(iv) विपरीत सम्बन्ध (Inverse Relation):

यदि R_4 = [(1, 1), (1, 2), (1, 3)} र R_5 = {(1, 1), (2, 1), (3, 1)} भए R_4 र R_5 ले एकआपसमा विपरीत सम्बन्ध (Inverse Relation) जनाउँछन्, जहाँ R_4 को क्षेत्र R_5 को विस्तार र R_4 को विस्तार R_5 को क्षेत्र छ । सम्बन्ध 'R' को विपरीत सम्बन्धलाई R^{-1} लेखिन्छ ।

उदाहरण 1

मानौँ R = {(1, 3), (1, 4), (2, 1), (4, 3), (4, 5)} एक सम्बन्ध छ । उक्त सम्बन्धको क्षेत्र (Domain), विस्तार (Range) र विपरीत सम्बन्ध (Inverse Relation) पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान

यहाँ, R = {(1, 3), (1, 4), (2, 1), (4, 3), (4, 5)}

क्षेत्र (Domain) = क्रमजोडामा भएका पहिलो सदस्यहरूको समूह = {1, 2, 4}

विस्तार (Range) = क्रमजोडामा भएका दोस्रो सदस्यहरूको समूह = {1, 3, 4, 5}

विपरीत सम्बन्ध (inverse relation) = R का सदस्यहरूको क्रम परिवर्तन गर्दा बन्ने समूह

R^{-1} = {(3, 1), (4, 1) (1, 2), (3, 4), (5, 4)}

उदाहरण 2

1. यदि A = {1, 2, 3} र A मा परिभाषित सम्बन्ध R = {(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 3), (2, 3), (1, 2), (2, 1)} छ । उक्त सम्बन्ध R, रिफ्लेक्सिभ (reflexive), सिमेट्रिक (symmetric) र ट्रान्जेटिभ (Transitive) छ छैन पत्ता लगाउनुहोस् ।

   समाधान

   यहाँ, R = {(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 3), (2, 3), (1, 2), (2, 1)} छ ।

   1R1, 2R2 र 3R3 भएकाले सम्बन्ध R रिफ्लेक्सिभ छ ।

   त्यस्तै, 1R2 र 2R1 भएकाले सम्बन्ध R सिमेट्रिक छ ।

   फेरि, 1R2, 2R3 र 1R3 भएकाले सम्बन्ध R ट्रान्जेटिभ छ ।

अभ्यास : 1.1.3 (B)

1. (a) सम्बन्धको विस्तार क्षेत्र भन्नाले के बुझिन्छ ? उदाहरणसहित प्रष्ट पार्नुहोस् ।
   (b) समतुल्य सम्बन्ध भनेको के हो ? एउटा उदाहरण प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

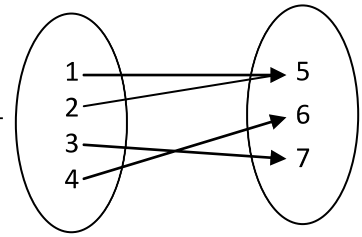
2. निम्न लिखित सम्बन्धहरूको क्षेत्र र विस्तार क्षेत्र लेख्नुहोस् :

   (a) R = {(1, 3), (1,4), (2,2), (2, 3) (3, 4)}

   (b) R = {(2, 4), (2, 6), (3, 3), (3, 6), (4, 4)}

   (c) R = {(2, 5), (2, 6), (2, 7), (3, 6), (3, 7), (4, 7)}

3. चित्रमा दिइएको सम्बन्ध (R) लाई क्रमजोडाका रूपमा व्यक्त गर्नुहोस् । उक्त सम्बन्धको (i) क्षेत्र (ii) विस्तार क्षेत्र (iii) विपरीत सम्बन्ध (R^{-1}) पत्ता लगाउनुहोस् ।



4. यदि A = {2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9} छ । A मा परिभाषित सम्बन्ध R = {(x,y), x ले y लाई ठिक भाग जान्छ । सम्बन्ध R लाई क्रमजोडाका रूपमा व्यक्त गरी

   (i) R को क्षेत्र (ii) R को विस्तार क्षेत्र

   (iii) विपरीत सम्बन्ध (R^{-1}) पत्ता लगाउनुहोस् ।

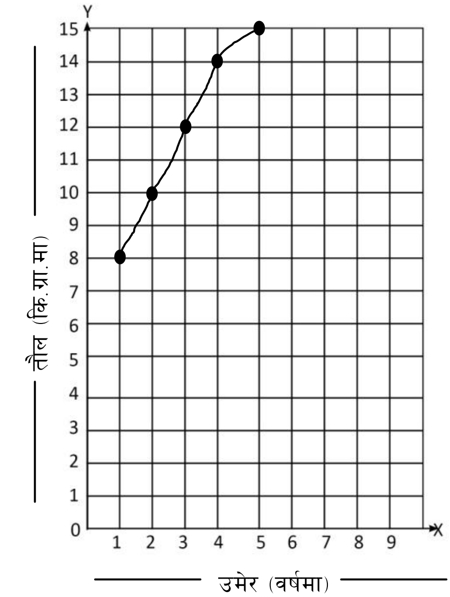
5. प्रश्न न. 3 मा दिइएको सम्बन्ध R, रेफ्लेक्सिभ, सिमेट्रिक र ट्रान्जेटिभ कुन कुन हुन्छ, पत्ता लगाउनुहोस् ।

6. एउटा सम्बन्ध R = {(x, y), 1< x < 4, y = 2x + 1} द्वारा परिभाषित छ । उक्त सम्बन्धको (i) क्षेत्र (ii) विस्तार (ii) विपरीत सम्बन्ध पत्ता लगाउनुहोस् ।

1.1.4. फलन (Function)

फलनको परिचय **(Introduction to function)**

(क) चित्रमा एउटा बच्चाको उमेरअनुसारको तौल लेखाचित्रमा प्रस्तुत गरिएको छ । उक्त लेखाचित्रको अध्ययन गरी तल दिइएको तालिका पूरा गर्नुहोस् :



चित्र न. 1.10

उमेर (वर्षमा) x	तौल (कि.ग्रा.मा) y	मिलान (correspondence, f)
1	8	$1 \rightarrow 8$
2	…….	……
3	……	…….
4	……	…..
5	……	……

के माथि उल्लिखित उमेर र तौल बिचको सम्बन्ध एक समान छ ?

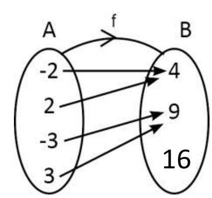
(ख) दिइएको मिलान चित्र 1.11 मा f: $A \rightarrow B$ का सदस्यहरू तल दिइएअनुसार सम्बन्धित छन् ।

$-2 \rightarrow 4$ (-2 को प्रतिबिम्ब 4 अथवा 4 को पूर्व प्रतिबिम्ब -2 छ ।)

$2 \rightarrow 4$ (2 को प्रतिबिम्ब 4 अथवा 4 को पूर्व प्रतिबिम्ब 2 छ ।)

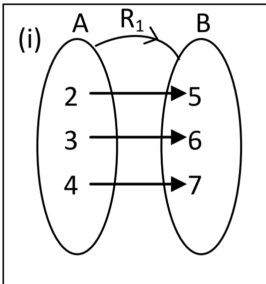
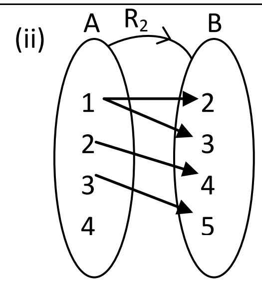
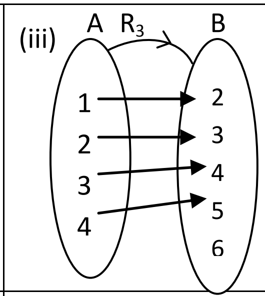
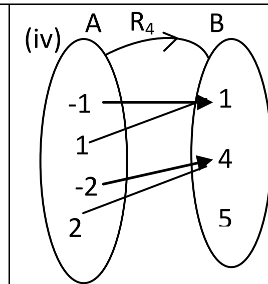
$-3 \rightarrow 9$ (-3 को प्रतिबिम्ब 9 अथवा 9 को पूर्व प्रतिबिम्ब -3 छ ।)

$3 \rightarrow 9$ (3 को प्रतिबिम्ब 9 अथवा 9 को पूर्व प्रतिबिम्ब -3 छ ।)



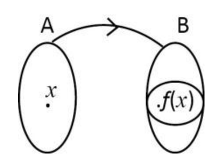
चित्र न. 1.11

पुनः तल दिइएका मिलान चित्रहरू अवलोकन गरी सोधिएका प्रश्नहरूको उत्तर समूहमा छलफल गरी पत्ता लगाउनुहोस् :

			
के A का प्रत्येक सदस्यको B को एउटा मात्र सदस्यसँग सम्बन्ध छ ?	के A का प्रत्येक सदस्यको B को एउटा मात्र सदस्यसँग सम्बन्ध छ ? के A का कुनै सदस्यको प्रतिबिम्ब B मा छैन ?	के A का प्रत्येक सदस्यको B को एउटा मात्र सदस्यसँग सम्बन्ध छ ? के B मा कुनै सदस्यहरू बिना सम्बन्धका छन ?	के A का प्रत्येक सदस्यको B का सदस्यसँग एउटा मात्र सम्बन्ध छ ?

चित्र न. 1.12

माथिका सम्बन्धहरूमध्ये R_1 र R_3 मा समूह A का प्रत्येक सदस्यको समूह B का एउटा मात्र सदस्यसँग सम्बन्ध छ । यी सम्बन्धहरू फलन (Function) हुन् ।



मानौं समूह A र B दुई समूहहरू छन् ।

जहाँ $A \neq \phi$ र $B \neq \phi$ छ । यदि समूह A बाट समूह B मा परिभाषित गरिएको सम्बन्ध f मा समूह A का प्रत्येक सदस्यहरूको एकल प्रतिबिम्ब समूह B मा छ भने उक्त सम्बन्ध f लाई फलन भनिन्छ । यसलाई $f: A \rightarrow B$ लेखिन्छ । सङ्केतमा लेख्दा यसलाई $y = f(x)$ जहाँ $x \in A$ र $y \in B$ हुन्छ ।

चित्र 1.11 मा,

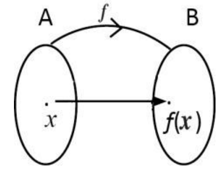
(i) पूर्व प्रतिबिम्बहरूको समूह {-2, 2 -3, 3} लाई क्षेत्र (Domain) भनिन्छ ।

(ii) प्रतिबिम्बहरूको समूह {4, 9} लाई विस्तार (Range) भनिन्छ ।

(iii) B = {4, 9, 16} लाई सहक्षेत्र (co-domain) भनिन्छ ।

(iv) सहक्षेत्रको उपसमूह विस्तार हुन्छ ।

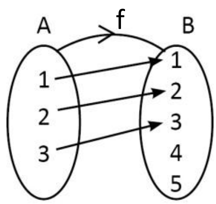
चित्रमा, x लाई पूर्व प्रतिबिम्ब (pre-image), $f(X)$ लाई प्रतिबिम्ब (image), A लाई क्षेत्र (domain), $\{f(X)\}$ लाई विस्तार (Range) र B लाई सहक्षेत्र (co-domain) भनिन्छ । f: A→B लाई फलन f, A देखि B [function 'f' from A to B) भनी पढ्ने गरिन्छ भने छोटकरीमा y = f(x) (y equals to function of x) लेखिन्छ ।



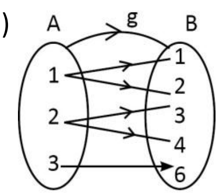
उदाहरण 1

दिइएको मिलान चित्रका आधारमा f र g फलन हुन् होइनन् कारणसहित लेख्नुहोस् । फलन भए उक्त फलनको क्षेत्र, सहक्षेत्र र विस्तार के के हुन्, लेख्नुहोस् ।

(a)



(b)



समाधान

यहाँ, (a) मा दिइएको सम्बन्ध f फलन हो किनकि A का प्रत्येक सदस्यको B का एकल सदस्यसँग सम्बन्ध छ ।

f को क्षेत्र = {1, 2, 3}

f को सहक्षेत्र = {1, 2, 3, 4, 5}

f को विस्तार = {1, 2, 3}

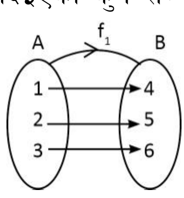
(b) मा दिइएको सम्बन्ध g फलन होइन किनकि A मा भएका सदस्यहरू 1 र 2 का B मा एकभन्दा बढी सदस्यहरूसँग सम्बन्ध छ ।

अभ्यास 1.1.4(A)

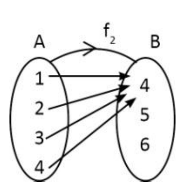
1. (a) फलनको परिभाषा लेख्नुहोस् ।
   (b) फलनको क्षेत्र भन्नाले के बुझिन्छ ? उदाहरणसहित लेख्नुहोस् ।

2. तल दिइएका कुन सम्बन्धहरू फलन हुन् र कुन होइनन् कारणसहित लेख्नहोस :

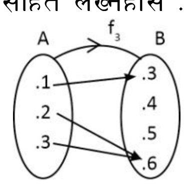
(a)

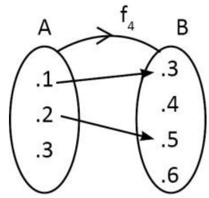


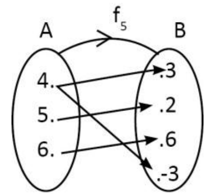
(b)

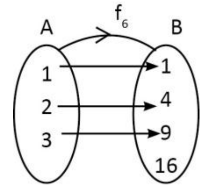


(c)



(d) 

(e) 

(f) 

3. तल दिइएका प्रत्येक सम्बन्धलाई मिलान चित्रमा प्रस्तुत गर्नुहोस् । यी सम्बन्धहरू फलन हुन् वा होइनन्, निर्धारण गर्नुहोस् । फलन भएमा उक्त फलनको क्षेत्र र विस्तार पनि लेख्नुहोस् ।

   (a) {(1, 2), (3, 6), (-2, -4), (-4, -8)}

   (b) {(-5, 3), (0, 3), (6, 3)}

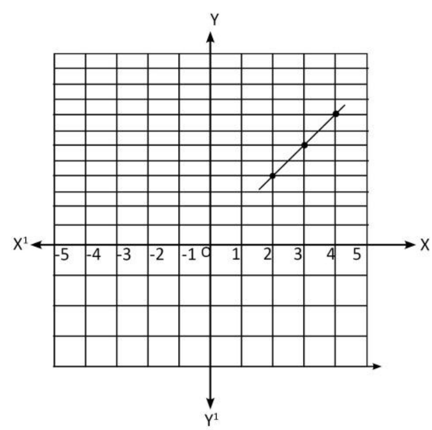
   (c) {(9,-5), (9, 5), (2, 4)}

   (d) {(-2, 5), (5, 7), (0, 1), (4, -2)}

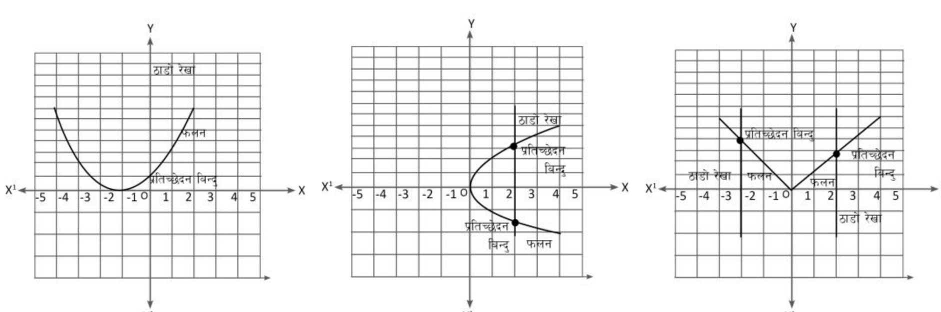
3. दैनिक जीवनमा फलन हुने र नहुने अवस्थाहरू खोजी गरी कक्षाकोठामा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

(ख) ठाडो रेखा परीक्षण (Vertical line test)

कुनै पनि फलन $y = f(x)$ लाई $f = \{(x, y)\}$ को रूपमा लेख्न सकिन्छ । उक्त फलनलाई वर्गाङ्कित कागजमा पनि देखाउन सकिन्छ । यसलाई लेखाचित्र (graph) भनिन्छ । उदाहरणका लागि $f = \{(2, 4), (3, 6), (4, 8)\}$ लाई लेखाचित्रमा निम्नअनुसार देखाउन सकिन्छ :



चित्र न. 1.13



(i) (ii) (iii)

चित्र न. 1.14

माथि दिइएको लेखाचित्रमा, चित्र 1.14 (i) मा ठाडो रेखाले फलनलाई एउटा मात्र बिन्दुमा भेटेको छ । चित्र न. 1.14 (ii) मा ठाडो रेखाले दुई ओटा बिन्दुहरूमा प्रतिच्छेदन गरेको छ । चित्र न. 1.14 (iii) मा दुई ओटा ठाडो रेखाहरू प्रत्येकले एउटा बिन्दुमा मात्र फलनलाई प्रतिच्छेदन गरेको छ ।

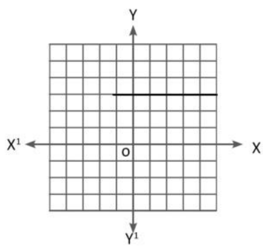
> यदि ठाडो रेखाले कुनै सम्बन्धको लेखाचित्रलाई एउटा मात्र बिन्दुमा प्रतिच्छेदन गर्छ भने त्यस्तो सम्बन्धले फलनलाई जनाउँछ ।

चित्र न. 1.14 (i) र (iii) ले मात्र फलनलाई जनाउँछन् ।

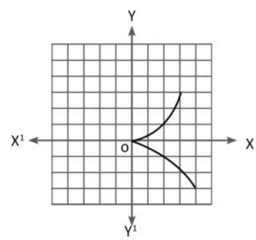
अभ्यास 1.1.4 (B)

1. ठाडो रेखा जाँच गर्नुहोस् र कुन कुन लेखाचित्रले फलन जनाउँछ लेख्नुहोस् :

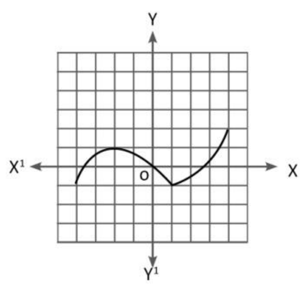
(a)



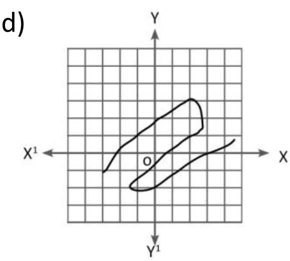
(b)



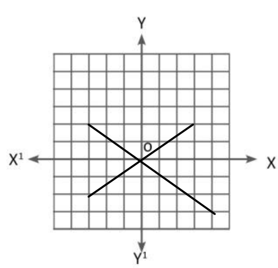
(c)



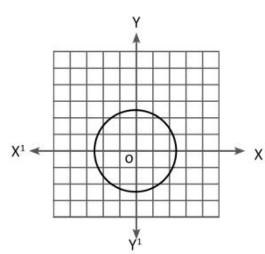
(d)



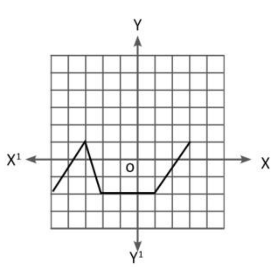
(e)



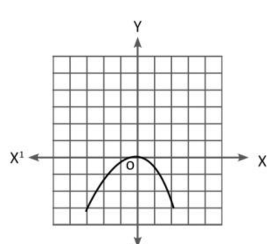
(f)



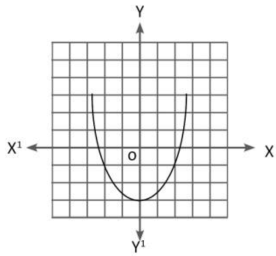
(g)



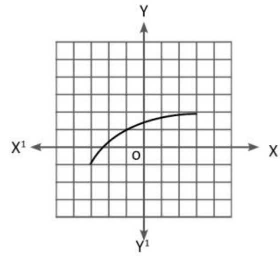
(h)



(i)



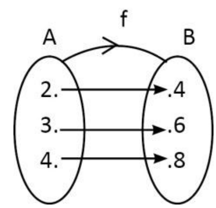
(j)



(ग) फलनका किसिम (Types of function)

(a) सम्पूर्ण फलन (onto function)

चित्र 1.15 मा फलन f को सहक्षेत्र र विस्तार क्षेत्र पत्ता लगाउनुहोस् । के तिनीहरू बराबर छन् ?

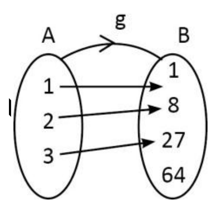


चित्र न. 1.15

फलन f मा f को सहक्षेत्र र विस्तार बराबर छन् । f लाई सम्पूर्ण फलन भनिन्छ ।

B का प्रत्येक सदस्यको पूर्व प्रतिबिम्ब छ । f:A→ B मा f को विस्तार B भएमा f लाई सम्पूर्ण फलन भनिन्छ ।

(b) अपूर्ण फलन (into function)



चित्र न. 1.16

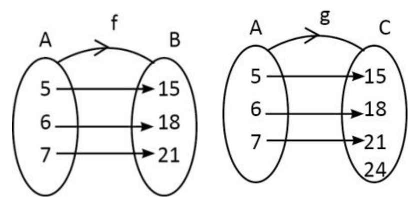
चित्र न. 1.16 मा फलन g को सहक्षेत्र र विस्तार क्षेत्र पत्ता लगाउनुहोस् । ती दुई समूहहरूबिच कस्तो सम्बन्ध छ ? के 64 को पूर्व प्रतिबिम्ब छ ?

दिइएको मिलान चित्रमा, फलन g को सहक्षेत्रको उपयुक्त समूह विस्तार छ । g लाई अपूर्ण फलन भनिन्छ ।

f:A → B मा g को विस्तार B को उपयुक्त समूह भएमा g लाई अपूर्ण फलन भनिन्छ ।

(c) एक एक फलन (one to one function)

के चित्र 1.17 (i) र 1.17 (ii) मा दिइएका फलनहरू f र g मा विस्तारका सदस्यहरूको एउटा मात्र पूर्व प्रतिबिम्ब छ ?



(i) *(ii)*

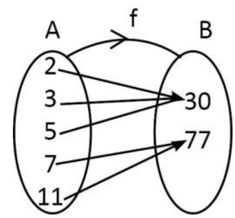
चित्र न. 1.17

दिइएको मिलान चित्रमा, फलन f को विस्तारका प्रत्येक सदस्यको एकल प्रतिबिम्ब छ । उक्त फलनलाई एक एक फलन भनिन्छ ।

चित्र 1.17 मा फलनहरू f र g का विस्तारका प्रत्येक सदस्यको एकल प्रतिबिम्ब छ ।

(d) बहुएक फलन (Many to one function)

चित्र 1.18 मा फलन f को समूह B का सदस्यहरू 30 र 77 का कति ओटा पूर्व प्रतिबिन्बहरू छन् ? ती के के हुन् ? छलफल गर्नुहोस् ।



चित्र न. 1.18

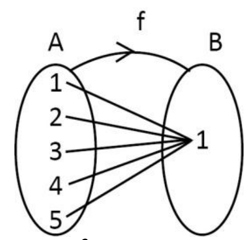
दिइएको मिलान चित्रमा, $f: A \rightarrow B$ को क्षेत्रको कम्तीमा दुई सदस्यहरूको प्रतिबिम्ब एउटै छ । उक्त फलनलाई बहुएक फलन भनिन्छ ।

$f: A \rightarrow B$ मा B को कुनै सदस्यको दुई अथवा दुईभन्दा बढी पूर्व प्रतिबिम्ब भएमा f लाई बहुएक फलन भनिन्छ ।

थप फलनहरू (Additional Functions)

(a) अचर फलन (constant function)

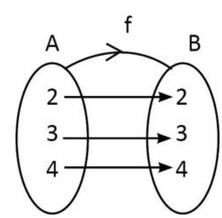
दिइएको मिलान चित्र 1.19 मा $f:A \rightarrow B$ को क्षेत्र A का सबै सदस्यहरूको एउटै मात्र प्रतिबिम्ब छ । उक्त फलन f लाई अचर फलन भनिन्छ ।



चित्र न. 1.19

(b) एकात्मक फलन (identity function)

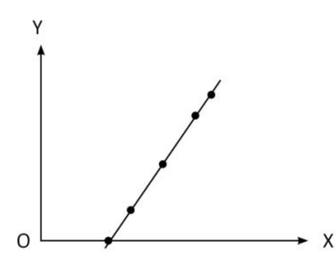
दिइएको मिलान चित्र 1.20 मा फलन $f:A \rightarrow B$ को पूर्व प्रतिबिम्ब र प्रतिबिम्ब र प्रतिबिम्बका सदस्यहरू एउटै छन् । उक्त फलनलाई एकात्मक फलन भनिन्छ ।



चित्र न. 1.20

(c) रेखीय फलन (linear function)

दिइएको लेखाचित्रमा फलनलाई सिधा रेखाद्वारा जनाइएको छ । उक्त फलनलाई रेखीय फलन भनिन्छ ।

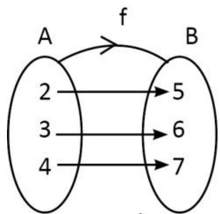


चित्र न. 1.21

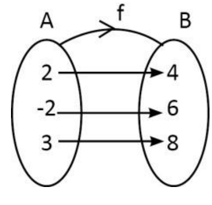
अभ्यास 1.1.4 (C)

1. तलका लेखाचित्र र मिलान चित्रमा देखाइएका फलनको प्रकार कारणसहित लेख्नुहोस् :

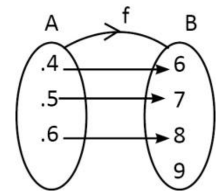
(a)



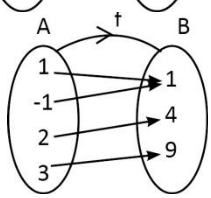
(b)



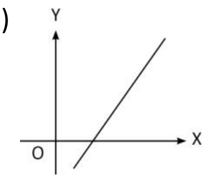
(c)



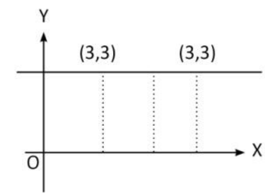
(d)



(e)



(f)



2. तल दिइएका फलनहरूलाई मिलान चित्रमा देखाई फलनका प्रकार लेख्नुहोस् :

(a) f ={1, 2), (2, 4), (3, 6)}

(b) g ={(1, 1), (-1, 1), (2, 4), (3, 9)}

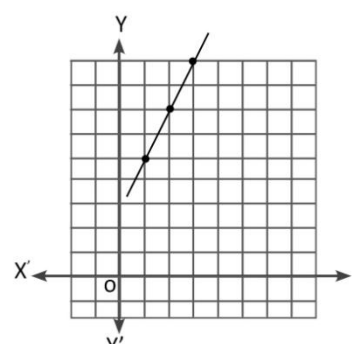
(c) h = {(1, 0), (2, 0), (3, 0)}

(घ) फलनको मान (Functional Value):

चित्र 1.22 मा फलन f ले सिधा रेखालाई जनाउँछ । जसलाई f = {(1,5), (2,7), (3,9)} अथवा $f(x) = 2x + 3$ लेख्न सकिन्छ ।

f:A $\rightarrow$ B मा A लाई क्षेत्र र B लाई फलन f को सहक्षेत्र भनिन्छ ।

प्रत्येक $x \in A$ का लागि $f(x) \in B$ प्राप्त हुन्छ । x लाई फलन f को पूर्व प्रतिबिम्ब तथा $f(x)$ लाई फलन f को प्रतिबिम्ब अथवा फलनको मान भनिन्छ ।



चित्र न. 1.22

यहाँ, $f(x) = 2x + 3$ मा f (...) = 2(...) + 3 का स्वरूपमा पनि लेख्न सकिन्छ । यसरी (...) को स्थानमा क्षेत्रको कुनै सदस्य 4 राख्दा f (4) को मान 2 x 4 + 3 = 8 + 3 = 11 हुन्छ भने x को मान 0 राख्दा f(0) कति होला ?

उदाहरण 1

$f: A \rightarrow B$ का लागि $A = \{-1, 0, 1, 2\}$ र $f(x) = 2x + 1$, भए f को विस्तार पत्ता लगाउनुहोस् :

समाधान

यहाँ, $f(x) = 2x + 1$

$f(-1) = 2 \times (-1) + 1 = -2 + 1 = -1$

$f(0) = 2 \times 0 + 1 = 0 + 1 = 1$

$f(1) = 2 \times 1 + 1 = 2 + 1 = 3$

$f(2) = 2 \times 2 + 1 = 4 + 1 = 5$

त्यसैले f को विस्तार $\{-1, 1, 3, 5\}$ हुन्छ ।

उदाहरण 2

यदि $f(x) = 3x - 5$ को प्रतिबिम्ब 7 भए पूर्व प्रतिबिम्ब कति हुन्छ ? पत्ता लगाउनुहोस् :

समाधान

यहाँ $f(x) = 3x - 5$, $f(x) = 7$

अथवा, $7 = 3x - 5$ [$f(x)$ लाई प्रतिबिम्ब भनिन्छ ।]

अथवा, $7 + 5 = 3x$

अथवा, $12 = 3x$

अथवा, $\frac{12}{3} = x$

अथवा $4 = x$

$\therefore$ 7 को पूर्व प्रतिबिम्ब 4 हुन्छ ।

उदाहरण 3

यदि $f(x + 2) = 3x - 2$ भए $f(2)$ पत्ता लगाउनुहोस् :

समाधान

यहाँ $f(x + 2) = 3x - 2$

अथवा, $f(x + 2) = 3(x + 2) - 6 - 2$

अथवा, $f(x + 2) = 3(x + 2) - 8$

अथवा, $f(x) = 3x - 8$ [$(x + 2)$ को स्थानमा x राख्दा]

अब, $f(2) = 3 \times 2 - 8 = 6 - 8 = -2$

अभ्यास 1.1. 4 (D)

1. तल दिइएका फलनहरूको उदाहरणसहित परिभाषा लेख्नुहोस् :

   (a) सम्पूर्ण फलन (b) अपूर्ण फलन

   (c) एक एक फलन

2. तल दिइएका अवस्थामा फलनहरूको प्रतिबिम्ब अथवा पूर्व प्रतिबिम्ब पत्ता लगाउनुहोस् :

   (a) $f(x) = 4x + 5$, f(2), f(3), f(5)

   (b) $f(x) = 2x + 3$, $f(x) = 7$, $x = ?$

   (c) $f(x) = 5x - 1 = 14$, $x = ?$

3. तल दिइएका फलनहरूको क्षेत्र (D) दिइएको अवस्थामा विस्तार (R) पत्ता लगाउनुहोस् :

   (a) $f(x) = 2x – 4$, D = {1, 0, 3}

   (b) $g(x) = 3x + 1$, D = (1, 3, 5)}

   (c) $h(x) = 2- 3x$, D= {-1,0, 1, 2, 3}

4. (a) यदि $f(x + 2) = 5x – 8$ भए f (x) र f(5) पत्ता लगाउनुहोस् ।

   (b) यदि $f(x + 1) = 3x + 4$ भए f(x) र f(3) पत्ता लगाउनुहोस् ।

5. (a) यदि $f(x) = x - 5$ भए f(h), f(x + h) र $\frac{f(x+h)-f(x)}{h} (h \neq 0)$ पत्ता लगाउनुहोस् ।

   (b) यदि $f(x) = \begin{cases} 3x - 1; x > 0 \\ x + 1; x < 0 \end{cases}$ भए $f(-1), f\left(\frac{1}{5}\right), f(0)$ पत्ता लगाउनुहोस् ।

6. तपाईंको दैनिक जीवनमा फलनको प्रयोग के कसरी भएको छ ? छोटो रिपोट तयार गरी कक्षाकोठामा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

1.2. बहुपदीयहरू (Polynomials)

1.2.0 पुनरावलोकन (Review)

निम्न प्रश्नहरूमा छलफल गर्नुहोस् :

(a) यदि $f(x) = x^2 - 4$ भए f(1), f(2) र f(4) को मान कति हुन्छ ?

(b) रेखीय फलनको एउटा उदाहरण लेखी लेखाचित्रमा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

(c) $\frac{1}{x^2}$ मा x को घात कति हुन्छ ?

(d) $\sqrt[5]{x^{15}}$मा x को घात कति हुन्छ ?

(e) अभिव्यञ्जक $xy^2 + xy + 2$ को डिग्री कति छ, आदि ।

1.2.1 बहुदीयको परिचय (Introduction to polynomial)

बीज गणितीय अभिव्यञ्जकहरू अथवा फलनहरू निम्न तिन तरिकाले वर्गीकरण गर्न सकिन्छ :

(i) गुणाङ्कका आधारमा

फलन	गुणाङ्कहरू	गुणाङ्कहरूको प्रकृति
$f(x)= 3x^2 + 5x- 6$	3, 5, -6	पूर्णाङ्कहरू
$f(x) = 4x^3 -\frac{5}{3}x^2 + \frac{1}{5}x_x + 7$	$4, \frac{-5}{3}, \frac{1}{5}, 7$	आनुपातिक सङ्ख्याहरू
$f(x) = x^2 + 12x + 18$	1, 12, 18	धनात्मक पूर्णाङ्कहरू
$f(x) = \sqrt{2}x^3 - 4x^2 + \sqrt{5}x + 8$	$\sqrt{2}$, -4, $\sqrt{5}$, 8	वास्तविक सङ्ख्याहरू

(ii) फलनमा भएका पदहरूका आधारमा

फलन	पदहरूको सङ्ख्या	नाम
$f(x) = 4x$	1	एक पदीय (monomial)
$f(x) = 4x +5$	2	द्विपदीय (binomial)
$f(x) = 4 x^2 + 4x + 7$	3	त्रिपदीय (trinomial)

दुई अथवा दुईभन्दा बढी पदहरू भएको फलनलाई बहुपदीय भनिन्छ ।

(iii) घाताङ्कका आधारमा

फलन	डिग्री (degree)	फलनको नाम
$f(x) = 4x + 3$	1	रेखीय फलन (linear function)
$f(x) = 3x^2 + 4x + 5$	2	वर्ग घातीय फलन (quadratic function)
$f(x) = x^{10} + 3x^7 + 12$	10	बहुघातीय फलन (polynomial function)

बहुपदीयको डिग्री जहिले पनि धनात्मक पूर्णाङ्क हुन्छ ।

बहुपदीय भनेको एउटा आनुपातिक अभिव्यञ्जक हो । जसका प्रत्येक पदहरू धनात्मक घात भएका र तिनीहरूलाई अचरले गुणन गरिएको हुन्छ । यसलाई $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x_2 + \ldots + a_nx^n$ को स्वरूपमा लेख्ने गरिन्छ । जहाँ $a_0, a_1, a_2, \ldots a_n$ वास्तविक सङ्ख्याहरू हुन् र n धनात्मक पूर्णाङ्क हो । $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots a_nx^n$ लाई n घाताङ्क अथवा n डिग्रीको बहुपदीय भनिन्छ ।

केही बहुपदीयहरूका नाम माथि दिइएअनुसार हुन्छ । बहुपदीयका गुणहरू पूर्णाङ्कका गुणहरूसँग मेल खाने हुन्छन् ।

(i) $2x^3 + 3x^2 + 5x + 4$ एक बहुपदीय हो किनकि यो 'x' को पदमा घातीय फलन हो ।

(ii) $2x^{-3} + 3x^2 + 5x^{\frac{1}{2}} + 4$ एक बहुपदीय होइन, किनकि पहिलो र तेस्रो पदमा x को घात धनात्मक पूर्णाङ्क छैन ।

(iii) यदि बहुपदीयका पदहरू बढ्दो अथवा घट्दो घाताङ्कअनुसार प्रस्तुत गरिएका छन् भने त्यस्तो बहुपदीयलाई स्तरीय स्वरूपको बहुपदीय (standard form of polynomials) भन्दछन् ।

जस्तै : $f(x) = 5x^4 + 3x^2 + 7x + 8$ (घाताङ्क घट्दो क्रममा)

$= 8 + 7x + 3x^2 + 5x^4$ (घाताङ्क बढ्दो क्रममा)

दिइएका बहुपदीयको नाम उक्त बहुपदीयमा भएका पदहरूमध्ये सबभन्दा ठुलो घाताङ्कका नामबाट राख्ने गरिन्छ । माथि दिइएको बहुपदीय '4' घाताङ्कीय बहुपदीय हो ।

(iv) दुई ओटा बहुपदीयहरूमा एउटै घाताङ्क भएका पदहरूको गुणाङ्क बराबर भए तिनीहरूलाई बराबर बहुपदीयहरू भनिन्छ ।

जस्तैः $f(x) = 5x^3 + 7x + 8$ र

$g(x) = \frac{10}{2}x^3 + \sqrt{49}x + 8$

(v) बहुपदीयमा भएका पदहरूमा साङ्ख्यिक (numeral) र लिटरल (literal) गुणाङ्कहरू हुन्छन् । उदाहरणका लागि $f(x) = 5ax$ मा x को साङ्ख्यिक गुणाङ्क 5 र लिटरल गुणाङ्क a हुन्छ ।

अभ्यास 1.2.1

1. तल दिइएका अभिव्यञ्जकहरू मध्ये कुन कुन बहुपदीय हुन् र कुन कुन बहुपदीय होइनन ? कारणसहित लेख्नुहोस् ।

   (a) $2x + 3$ (b) $\sqrt[2]{x} + 5$ (c) $2x^3 + \sqrt[3]{x}$ (d) $\frac{1}{4}x^3 - 2x^2 + 5x + 6$

2. तल दिइएका अभिव्यञ्जकहरूको साङ्ख्यिक गुणाङ्क र लिटरल गुणाङ्क पत्ता लगाउनुहोस् :

   (a) $2xy$ मा y को (b) $3x^2y$ मा y को (c) $\frac{3xy+5}{8}$ मा xy को

3. तलका फलनहरूको डिग्री (degree) पत्ता लगाउनुहोस् :

   (a) $f(x) = 2x^2y$ (b) $g(x) = 3xyz^2$

   (c) $f(x) = 3x^2 - 4x^5 + 2x$ (d) $g(x) = 8x^3 - \sqrt{3}x + 4x^4 + 5$

   (e) $h(xy) = 6x^3y^2 + 7xy^3 + 7xy^4$ (f) $g(xy) = 3x^4y - 5x^2y^5 + xy^3$

4. तल दिइएका बहुपदीयहरूलाई बढ्दो क्रममा लेख्नुहोस् :

   (a) $2x^3 + 5x^2 + 7x + 9x^4$

   (b) $\sqrt{3}x^3 + 7x^2 + 3x^4 + 5$

5. तल दिइएका बहुपदीयहरूलाई घट्दो क्रममा लेख्नुहोस् :

   (a) $2x^2 - x + 8 + 3x^3$ (b) $x^4 + 2x + 1 + 3x^3$ (c) $4x^3 + 2x^2 - 3 + 4x^2$

6. तल दिइएका बहुपदीयहरूमध्ये बराबर बहुपदीय कुन कुन हुन्, लेख्नुहोस् :

   $f(x) = x^3 + 4x^2 + 5x + 6$

   $g(x) = 3x^3 - x^2 + 7x + 8$

   $h(x) = \sqrt{25}x^2 + 6 + x^3 + \sqrt{16}x^2$

   $k(x) = \sqrt{64} + \sqrt{49}x + \sqrt[3]{27}x^3 + 5x^2 - 6x^2$

1.2.2 बहुपदीयका क्रियाहरू (Operations on Polynomial)

$3x^2$, $4x^2$, $7x$, $8x^3$, $-7x^2$, $4x^0$ मा सजातीय पदहरू कुन कुन हुन् ? छलफल गर्नुहोस् । त्यस्तै घाताङ्कका नियम प्रयोग गरी $x^3 \times x^3$ र $x^{\frac{3}{2}} \times x^{\frac{7}{2}}$ को गुणनफल कति कति हुन्छ, लेख्नुहोस् ।

के दुई वा दुईभन्दा बढी बहुपदीयहरूलाई जोड्न, घटाउन र गुणन गर्न सकिन्छ ? छलफल गर्नुहोस् ।

(क) जोड र घटाऊ (Addition and subtraction)

मानौँ बहुपदीयहरू $4x^3 - 3x^2 - 7x = p(x)$, $2x^2 - 5x + 7 = q(x)$ र $3x^3 + 5 = r(x)$ छन् ।

यी बहुपदीयहरूलाई जोड्दा $(p(x) + q(x)) + r(x)$ हुन्छ ।

यहाँ, $P(x)$, $q(x)$ र $r(x)$ का सजातीय पदका गुणाङ्कहरूलाई जोड्दा,

$$[p(x) + q(x)] + r(x) = (4 + 0 + 3)x^3 + (-3 + 2 + 0)x^2 + (-7 - 5 + 0)x + (0 + 7 + 5)$$
$$= 7x^3 - x^2 - 12x + 12$$

अब, $7x^3 - 8x^2 + 12x + 5$ बाट $2x^3 + 4x^2 - 8x$ घटाउनुहोस् ।

यहाँ, $p(x) = 7x^3 - 8x^2 + 12x + 5$ र $q(x) = 2x^3 + 4x^2 - 8x$ मानौँ

अब, $p(x) - q(x)$

$$= 7x^3 - 8x^2 + 12x + 5 - (2x^3 + 4x^2 - 8x)$$
$$= 7x^3 - 8x^2 + 12x + 5 - 2x^3 - 4x^2 + 8x$$
$$= (7 - 2)x^3 + (-8 - 4)x^2 + (12 + 8)x + 5$$
$$= 5x^3 - 12x^2 + 20x + 5$$

(ख) गुणन (Multiplication)

यदि $f(x) = x^2 + x + 1$ र $g(x) = (x^2 - x + 1)$ भए $f(x) \times g(x)$ पत्ता लगाउनुहोस् :

यहाँ, $f(x) = x^2 + x + 1$

$g(x) = x^2 - x + 1$

अब, $f(x).\,g(x)$

$$= (x^2 + x + 1).\,(x^2 - x + 1)$$
$$= x^2(x^2 - x + 1) + x(x^2 - x + 1) + 1(x^2 - x + 1)$$
$$= x^4 - x^3 + x^2 + x^3 - x^2 + x + x^2 - x + 1$$
$$= x^4 + x^2 + 1$$

उदाहरण 1

यदि $f(x) = 2x - 1$, $g(x) = 2x + 1$ र $h(x) = 5x^2 + 6x + 2$ भए $f(x).g(x) + h(x)$ पत्ता लगाउनुहोस् :

समाधान

यहाँ, $f(x) = 2x - 1$, $g(x) = 2x + 1$, $h(x) = 5x^2 + 6x + 2$

$$f(x).g(x) = (2x - 1) . (2x - 1)$$
$$= (2x)^2 - (1)^2$$
$$= 4x^2 - 1$$

फेरि, $f(x)g(x) + h(x) = 4x^2 - 1 + 5x^2 + 6x + 2$
$$= 9x^2 + 6x + 1$$

उदाहरण 2

यदि $f(x) = 5x + 1$, $g(x) = 25x^2 - 5x + 1$ र $h(x) = 128x^3 - 4x^2 + 6x + 9$ भए $h(x) - f(x).g(x)$ पत्ता लगाउनुहोस् :

समाधान

यहाँ, $f(x) = 5x + 1$

$g(x) = 25x^2 - 5x + 1$

$h(x) = 128x^3 - 4x^2 + 6x + 9$

अब, $f(x).g(x) = (5x + 1). (25x^2 - 5x + 1)$
$$= 5x(25x^2 - 5x + 1) + 1(25x^2 - 5x + 1)$$
$$= 125x^3 - 25x^2 + 5x + 25x^2 - 5x + 1$$
$$= 125x^3 + 1$$

त्यसैले, $h(x) - f(x).g(x)$
$$= 128x^3 - 4x^2 + 6x + 9 - (125x^3 + 1)$$
$$= 128x^3 - 4x^2 + 6x + 9 - 125x^3 - 1$$
$$= 3x^3 - 4x^2 + 6x + 8$$

अभ्यास 1. 2.2

1. (a) बहुपदीयको परिभाषा लेख्नुहोस् ।

   (b) वर्गघातीय फलनको उदाहरण लेख्नुहोस् ।

2. $f(x) + g(x)$ पत्ता लगाउनुहोस् :

(a) $f(x) = 3x^3 - 4x^2 + 5x - 7$

$g(x) = 2x^2 - 3x + x^3$

(b) $f(x) = 7x^3 + 4x^2 - 5$

$g(x) = x^3 - x^2 + 1$

3. (a) यदि $f(x) = x^6 - 3x^2 - 7$ र $g(x) = x^7 - 2x^5 + 2x^2 + x + 2$ भए $g(x) - f(x)$ पत्ता लगाउनुहोस् ।

(b) यदि $h(x) = 3x^3 - 7x^2 + 5x + 9$ र $g(x) = 3 - 4x + 5x^2$ भए $h(x) - g(x)$ पत्ता लगाउनुहोस् ।

4. $f(x).\ g(x)$ पत्ता लगाउनुहोस् :

(a) $f(x) = (x^3 - 1)$, $g(x) = (x^3 + 1)$

(b) $f(x) = (x^2 - x + 1)$, $g(x) = (x + 1)$

(c) $f(x) = x^3 - 2x^2 + x - 1$

$g(x) = x^2 - 2x + 4$

5. यदि $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4x + 5$

$g(x) = 5 + 7x^2 - 3x^3$ र $r(x) = x^3 + 7$ भए

$[f(x) + g(x)] + r(x)$ पत्ता लगाउनुहोस् ।

6. यदि $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{7}{9}x - 6$,

$g(x) = \frac{2}{3}x^3 + 5 - \frac{1}{9}x$ र $h(x) = x^2 + x$ भए

$[f(x) + g(x)] - h(x)$ पत्ता लगाउनुहोस् ।

7. (a) यदि $f(x) = (x - 1)$, $g(x) = x^2 + x + 1$ र $h(x) = x^2 + 2x - x^3$ भए $\{f(x) \times g(x)\} + h(x)$ पत्ता लगाउनुहोस् ।

(b) यदि $f(x) = (x + 2)$

$g(x) = (x + 3)$ र $h(x) = 2x^2 - 4x + 3$ भए $f(x).g(x) = h(x)$ प्रमाणित गर्नुहोस् ।

(c) यदि $f(y) = (2y-1)$

$g(y) = (4y^2 + 2y + 1)$ र $h(y) = 10y^3 + 2y^2 + 3y - 6$ भए $h(y) - [f(y) \times g(y)$ पत्ता लगाउनुहोस् ।

1.3 अनुक्रम र श्रेणी (Sequence and series)

1.3.0 पुनरावलोकन (Review)

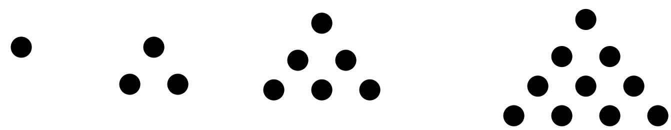
तल दिइएका प्रश्नहरूको समूहमा छलफल गरी उत्तर लेख्नुहोस् :

(a) $2x + 3$ को डिग्री कति होला ?

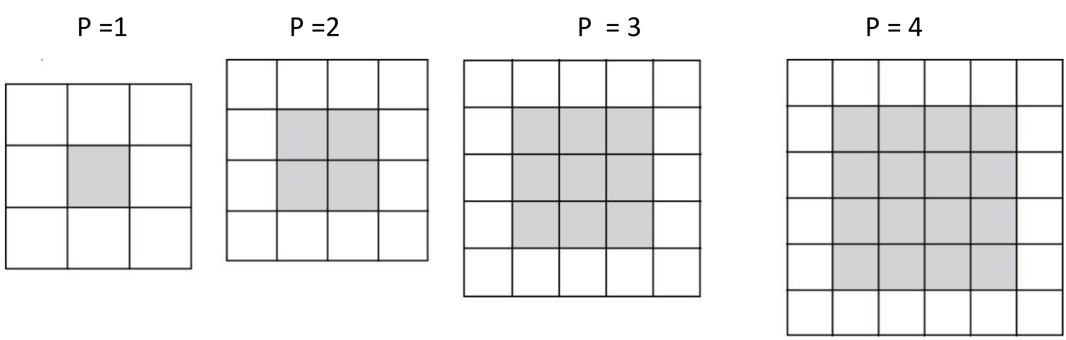
(b) $ax^2 + bx + c$, दुई डिग्रीको बहुपदीय हुन अनिवार्य सर्त के हो ?

(c) यदि $f(n) = 2n - 5$ भए $f(1), f(2), f(3), f(4)$ को मान कति कति होला ?

(d) चित्रमा दिइएका डट (थोप्ला) हरूको ढाँचाले के देखाउँछ ?



1.3.1 अनुक्रमको परिचय (Introduction to sequence)



माथिको चित्रमा एउटा घरमा बिछ्याइएका टाइलहरूको संरचना क्रमबद्ध रूपमा देखाइएको छ । p ले संरचनाको क्रमलाई जनाउँछ । ले रातो पारेको र ले सेतो टायललाई जनाउँछ भने,

(क) प्रत्येक संरचनाका लागि चाहिने रातो टायलको सङ्ख्या पत्ता लगाउने सुत्र 'P' का पदमा व्यक्त गर्नुहोस् ।

(ख) प्रत्येक संरचनाका लागि चाहिने सेतो टायलको सङ्ख्या पत्ता लगाउने सूत्र 'P' का पदमा व्यक्त गर्नुहोस् ।

(ग) जम्मा टायलहरू पत्ता लगाउने सूत्र 'P', का पदमा व्यक्त गर्नुहोस् ?

(घ) के माथिका संरचनाहरू निश्चित क्रममा राखिएका छन ? समूहमा छलफल गर्नुहोस् ।

त्यस्तै, 2, 4, 8, 16, 32, . . ., . . ., लाई निश्चित क्रममा राखिएको छ ? यसरी निश्चित क्रममा राखिएको छ भने 32 पछि लगातार आउने दुई ओटा पदहरू के के होलान ?

कुनै सङ्ख्याहरूको समूहलाई एउटा निश्चित नियममा राखिएको छ भने उक्त नियमअनुसार राखिएको फलनलाई अनुक्रम (sequence) भनिन्छ ।

माथि टायलहरूको संरचनासँग आबद्ध सङ्ख्याहरू 2, 4,8, 16 32, . . .,. . . लाई अनुक्रमको उदाहरणका रूपमा लिन सकिन्छ ।

(i) हामीले कुनै बैङ्कको बचत खाता (saving accounts) मा राखिएको पैसा निश्चित व्याजदरमा राखिएको हुन्छ । पहिलो वर्ष, दोस्रो वर्ष, तेस्रो वर्ष, चौथो वर्ष आदिको व्याजले एउटा अनुक्रमलाई जनाउँछ ।

(ii) 18, 20, 22, 24, 26, ..., .. ले एउटा अनुक्रम बनाउँछ । . . . , . .. (एक पटकमा तिन ओटा थोप्ला राखी कमा (,) लाई अनुक्रममा राख्ने गरिन्छ जसको अर्थ यस्तै गरी (and so on) भन्ने बुझिन्छ । अनुक्रमहरू निश्चित (finite) र अनिश्चित (infinite) दुवै हुन्छन् । पदहरूको सङ्ख्या निश्चित भएको अनुक्रमलाई निश्चित अनुक्रम र पदहरूको सङ्ख्या निश्चित नभएको र अन्तिम पद पत्ता लगाउन नसकिने अनुक्रमलाई अनिशिचत अनुक्रम भनिन्छ ।

उदाहरण 1

1, 2, 3, 4, 5, . . ., . . ., मा थप दुई पदहरू के के होलान ? पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान

1, 2, 3, 4, 5, . . ., मा दिइएको सङ्ख्याहरूको क्रमले एउटा फलनलाई जनाउँछ जसको पछिल्लो पद, अघिल्लो पदभन्दा 1 ले बढी छ । त्यसैले थप दुई ओटा पदहरू क्रमशः 5 + 1 =6 र 6 + 1 = 7 हुन्छन् ।

उदाहरण 2

यदि, फलन f(n)= 75 + 5n मा n ले प्राकृतिक सङ्ख्यालाई जनाउँछ भने उक्त फलनका पहिला चार पदहरू पत्ता लगाई अनुक्रममा लेख्नुहोस् ।

समाधान

यहाँ, फलन f(n) = 75 + 5n

n = 1 राख्दा, f(1) = 75 + 5 x 1

= 75 + 5 = 80

n = 2 राख्दा f(2) = 75 + 5 x 2 = 75 + 10 = 85

n = 3 राख्दा, f(3) = 75 + 5 x 3 = 75 + 15 = 90

n = 4 राख्दा, f(4) = 75 + 5 x 4 = 75 +20 = 95

त्यसैले उक्त सङ्ख्याहरूको अनुक्रम

80, 85, 90,95, . . ., . . . हुन्छ ।

अभ्यास 1.3.1

1. तल दिइएका अनुक्रममा थप दुई पदहरूको मान पत्ता लगाउनुहोस् :

   (a) 3, 5, 7, 9, . . ., . . . (b) -4, -2,0, 2,. . ., . . .

   (c) 18, 14, 10, 6, 2, . . .,. . . (d) 20, 15, 10, 5, ..., ...

   (e) 5, 10, 20, 40 ...., (f) 64, 32, 16, 8, ..., ...

2. यहाँ दिइएका फलनहरूमा पहिला 5 पदहरू पत्ता लगाउनुहोस् र ती पदहरूलाई अनुक्रमका रूपमा व्यक्त गर्नुहोस् । 'n' ले प्राकृतिक सङ्ख्यालाई जनाउँछ ।

   (a) $f(n) = 3n + 2$

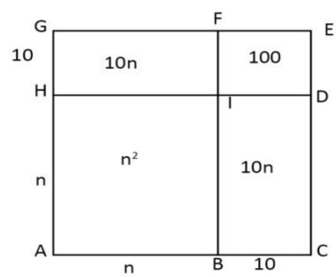
   (b) $f(n) = n^2 – 1$

   (c) $f(n) = 2^n$

   (d) $f(n) = (-1)^n. n^2$

1.3.2 साधारण पद (General term)

दिइएको चित्रमा $(n + 10)^2 = n^2 + 20 n +100$ लाई देखाइएको छ ।



n = 1, 2, 3, . . ., 10 राख्दा चित्रमा दिइएका आयत र वर्गहरूको क्षेत्रफलमा कसरी वृद्धि हुन्छ ? कुन वर्ग अथवा आयतको क्षेत्रफलको मान अचर हुन्छ ? छलफल गर्नुहोस् ।

$n^2 + 20n + 100$ ले केलाई जनाउँछ ? छलफल गर्नुहोस् ।

तल दिइएका अनुक्रममा n को मान 1 बाट सुरु हुँदा n औँ पद निकाल्ने सूत्र के होला ? छलफल गर्नुहोस् ।

अनुक्रम	**n औँ पदको सूत्र**
1, 2, 3, 4, 5, . . ., . . .	
1, 4, 9, 16, 25, . . ., .. .	

4, 9, 16, 25, . . ., . . .	
9, 16, 25, 36, . . ., . . .	

कुनै पनि अनुक्रममा n औँ पदको मान कुनै निश्चित सूत्रबाट निकाल्ने गरिन्छ । उक्त n औँ पदलाई अनुक्रमको साधारण पद (general term) भनिन्छ ।

केही अनुक्रमले बहुपदीयका गुणहरू प्रदर्शन गर्छन् भने केहीले गर्दैनन् ।

(क) **बहुपदीयका गुणहरू भएका अनुक्रमहरू**

(i) $y_n = an + b$ स्वरूपका अनुक्रमहरू

यदि कुनै अनुक्रमको पहिलो फरक एक समान आउँछ भने त्यस्तो अनुक्रमको साधारण पदको डिग्री '1' हुन्छ ।

उक्त अनुक्रम a + b, 2a + b, 3a + b, 4a + b, ..., an + b खालको हुन्छ ।

यहाँ, a + b, 2a + b 3a + b 4a + b . . .

पहिलो फरक (first difference) a a a

उदाहरण 18, 14, 10, 6, 2, . . ., . . . को साधारण पद पत्ता लगाउनुहोस् :

यहाँ, 18 14 10 6 2

पहिलो फरक -4 -4 – 4 – 4 . . .

पहिलो फरक एक समान (-4) भएकाले यो अनुक्रमको साधारण पद प्रथम डिग्रीको"an+b" स्वरूपको हुन्छ ।

जहाँ, a = -4 र पहिलो पद (a + b) = 18

अथवा, -4 + b = 18

अथवा, b = 22

त्यसैले साधारण पद (t_n) = an + b

= - 4n + 22

= 22 – 4n

(ii) $t_n = an^2 + bn + c$ स्वरूपका अनुक्रमहरू

जहाँ n = 1, 2, 3, . . . छन् ।

$t_n = an^2 + bn + c$ मा $n = 1, 2, 3, 4, \ldots$ राख्दा अनुक्रम निम्नअनुसार हुन्छ :

अनुक्रमः	$a + b + c$	$4a + 2b + c,$	$9a + 3b + c,$	$16a + 4b + c, \ldots$
पहिलो फरक	$3a + b$	$5a + b$	$7a + b \ldots$	
दोस्रो फरक	$2a$	$2a \ldots$		

यहाँ दोस्रो फरक एक समान (2a) भएकाले यस्तो अनुक्रमको साधारण पद वर्गघातीय हुन्छ ।

यहाँ, दोस्रो फरकको अनुक्रमको एक समान पद = 2a, पहिलो फरकबाट प्राप्त अनुक्रमको पहिलो पद = 3a + b

दिइएको अनुक्रमको पहिलो पद = a +b + c

उदाहरण 1

अनुक्रम 3, 6, 11, 18, 27, 38, . . ., . . . को साधारण पद पत्ता लगाउनुहोस् :

समाधान

अनुक्रम	3	6	11	18	27	38	. . .
पहिलो फरक	3	5	7	9	11	. . .	
दोस्रो फरक	2	2	2	2	. . .		

यहाँ, दोस्रो फरक एक समान छ । यो अनुक्रमको साधारण पदको स्वरूप $an^2 + bn + c$ हुन्छ ।

जहाँ, दोस्रो फरक (2a) = 2 अथवा, a = 1

पहिलो फरकको पहिलो पद (3a + b) = 3

अथवा, $3 \times 1 + b = 3$

अथवा, $b = 3 - 3$

अथवा, $b = 0$

अनुक्रमको पहिलो पद $(a + b + c) = 3$

अथवा, $1 + 0 + c = 3$

अथवा, $c = 3 - 1$

अथवा, $c = 2$

त्यसैले आवश्यक साधारण पद $(t_n) = an^2 + bn + c = n^2 + 2$

यसैगरी बहुपदीयहरू 2 भन्दा बढी घातका पनि हुन्छन् । तिनीहरूका साधारण पद पनि माथि दिइए जस्तै गरी पत्ता लगाउन सकिन्छ ।

(ख) **बहुपदीयका गुणहरू नभएका अनुक्रमहरू**

उदाहरण 2

3, 9, 27, 81 . . . अनुक्रमको फरक लिँदा के निश्चित फरक प्राप्त हुन्छ होला ?

उक्त अनुक्रमको n औँ पद पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान :

यहाँ, दिइएको अनुक्रम 3 9 27 81

पहिलो फरक 6 18 54

दोस्रो फरक 12 36

यहाँ फरक एक समान आउँदैन । यस्तो अवस्थामा अवलोकन र अनुमानबाट साधारण पद पत्ता लगाउन सकिन्छ । अथवा तालिकामा निम्नानुसार प्रस्तुत गर्न सकिन्छ :

पद	पहिलो	दोस्रो	तेस्रो	चौथो	पाँचौँ
पदको मान	$3 = 3^1$	$9 = 3^2$	$27 = 3^3$	$81 = 3^4$	3^5

त्यसैले, साधारण पद $(t_n) = 3^n$

समाधान 3

अनुक्रम $\frac{1}{4}, \frac{4}{9}, \frac{9}{16}, \frac{16}{25}, \ldots$ को साधारण पद पत्ता लगाउनुहोस् :

समाधान

यहाँ अनुक्रम $\frac{1}{4}, \frac{4}{9}, \frac{9}{16}, \frac{16}{25}, \ldots.$ मा पदहरू लाई निम्नानुसार तालिकामा राख्दा

पद सङ्ख्या	पहिलो	दोस्रो	तेस्रो	चौथो	n औँ
पदको मान	$\frac{1}{4} = \left(\frac{1}{2}\right)^{1+1}$ $= \left(\frac{1}{1+1}\right)^2$	$\frac{4}{9} = \left(\frac{2}{3}\right)^2$ $= \left(\frac{2}{2+1}\right)^2$	$\frac{9}{16} = \left(\frac{3}{4}\right)^2$ $= \left(\frac{3}{3+1}\right)^2$	$\frac{16}{25} = \left(\frac{4}{5}\right)^2$ $= \left(\frac{2}{4+1}\right)^2$	$= \left(\frac{n}{n+1}\right)^2$

त्यसैले, उक्त अनुक्रमको साधरण पद अथवा n औँ पद $\left(\frac{n}{n+1}\right)^2 = \frac{n^2}{(n+1)^2}$ हुन्छ ।

उदाहरण 4

अनुक्रम $0, \frac{-1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{-3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{-5}{6}, \ldots$ को साधारण पद पत्ता लगाउनुहोस् :

समाधान

यहाँ, दोस्रो, चौथो, छैटौँ . . . पदहरूको मान ऋणात्मक छ । त्यसैले यसलाई $(-1)^{n+1}$ द्वारा लेख्न सकिन्छ । दिइएको अनुक्रमलाई तालिकामा निम्नअनुसार देखाउन सकिन्छ :

त्यस्तै : घनात्मक मानहरू मात्र लिँदा

पद सङ्ख्या	पहिलो	दोस्रो	तेस्रो	चौथो	n औँ
पदको मान	$0 = \left(\frac{1-1}{1}\right)$	$\frac{1}{2} = \left(\frac{2-1}{2}\right)$	$\frac{2}{3} = \frac{3-1}{3}$	$\frac{3}{4} = \frac{4-1}{4}$	$= \frac{n-1}{n}$

त्यसैले दिइएको अनुक्रम $0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{-3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{-5}{6}, \ldots$ को साधारण पद $(-1)^{n+1}\left(\frac{n-1}{n}\right)$ हुन्छ ।

अभ्यास 1.3.2

1. तलका अनुक्रमहरूको साधारण पद (t_n) दिइएको छ । पहिलो पाँच ओटा पदहरूको मान पत्ता लगाउनुहोस् :

   (a) $3n + 1$ (b) $4n - 5$ (c) $n^2 + 4n + 5$ (d) $3n^2 - 5$

2. निम्न लिखित अनुक्रमहरूको साधारण पद (n) औँ पद पत्ता लगाउनुहोस् :

   (a) 5, 7, 9, 11, 13, . . . , . .
   (b) 5, 2, -1, -3, -7, . . . , . . .
   (c) 7, 11, 15, 19, 23, . . ., . . .
   (d) 2, 6, 12, 20, 30, . . ., ...
   (e) 4, -7, -26, -53., -88,-131, . . ., . . .
   (f) $\frac{1}{3}, \frac{4}{5}, 1, \frac{10}{9} \ldots, \ldots$
   (g) $\frac{2}{7}, \frac{5}{8}, \frac{8}{9}, \frac{10}{11} \ldots, \ldots$

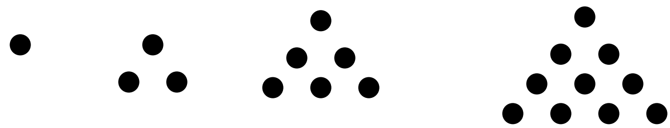
3. दिइएका चित्रात्मक अनुक्रमहरूको साधारण पद पत्ता लगाउने नियम लेख्नुहोस् :

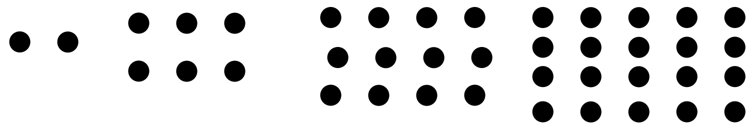
(a)

2
7
12
…
…
…
…
…

(b)

4
16
36
64
100
144
…
…

(c) 

(d) 

4. तपाईंले दैनिक जीवनमा अनुक्रमका उदाहरण कहाँ कहाँ पाउनुभएको छ । छोटो प्रतिवेदन तयार गरी कक्षाकोठामा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

1.3.3 श्रेणीको परिचय (Introduction to series)

तलका प्रश्नहरूलाई समूहमा छलफल गर्नुहोस् :

(a) साधारण पद $(t_n) = 4n - 1$ भएको अनुक्रमको पहिला चार ओटा पदहरूको योगफल कति होला ?

(b) के यी चार ओटा पदहरूलाई $t_1 + t_2 + t_3 + t_4$ लेख्न सकिन्छ ?

(c) $t_1 + t_2 + t_3 + t_4$ लाई छोटकारीमा Σt_n लेख्न सकिन्छ कि सकिँदैन ?

यदि अनुक्रमका पदहरूलाई योगफलका रूपमा व्यक्त गरिएमा त्यसलाई उक्त अनुक्रमसँग सम्बन्धित श्रेणी भनिन्छ । यसलाई 'Σ' (sigma or summation) चिह्नभित्र साधारण पद लेखी जनाइन्छ ।

जस्तैः 2, 4, 6, 8, 10, 12, . . . एउटा अनुक्रम छ ।

यो अनुक्रमको साधारण पद 2n हुन्छ ।

यससँग सम्बन्धित श्रेणी,

2 + 4+ 6 + 8 + 10 + 12 + . . .+ . . . हुन्छ ।

उदाहरण 1

साधारण पद $t_n = (-1)^{n+1} 2^n$ भएको अनुक्रमको

(i) पहिला पाँच ओटा पदहरूको मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ii) यी पाँच ओटा पदहरूको योगफल पत्ता लगाउनुहोस् ।

(iii) उक्त अनुक्रमको श्रेणीलाई 'Σ' चिह्न प्रयोग गरी लेख्नुहोस् ।

समाधान : (i) यहाँ साधारण पद$(t_n) = (-1)^{n+1}\, 2^n$ मा n मान क्रमशः 1, 2, 3, 4, 5 राख्दा

$t_1 = (-1)^{1+1} \times 2^1$ $\qquad$ $t_2 = (-1)^{2+1} \times 2^2$

$= (-1)^2 \times 2$ $\qquad$ $= (-1)^3 \times 4$

$= 1 \times 2$ $\qquad$ $= -1 \times 4$

$= 2$ $\qquad$ $= -4$

$t_3 = (-1)^{3+1} \times 2^3$

$= (-1)^4 \times 8$

$= 1 \times 8$

$= 8$

$t_4 = (-1)^{4+1} \times 2^4$, $\quad t_5 = (-1)^5 \times 2^5$

$= (-1)^5 \times 16 \quad = (-1)^6 \times 32$

$= -1 \times 16 \quad = 1 \times 32$

$= -16 \quad = 32$

(ii) $t_1 + t_2 + t_3 + t_4 + t_5$

$= 2 + (-4) + 8 + (-16) + 32$

$= 42 - 20$

$= 22$

(iii) $\sum_1^4 t_n$

$= \sum_1^4 (-1)^{n+1} 2^n$

अभ्यास : 1.3.3

1. (a) अनुक्रमको परिभाषा उदाहरणसहित लेख्नुहोस् ।

   (b) अनुक्रम र श्रेणीबिच भिन्नता देखाउनुहोस् ।

2. तल दिइएका मध्ये कुन कुन अनुक्रम र कुन कुन श्रेणी हुन् छुट्याउनुहोस् :

   (a) 4, 5, 6, 7, 8, 9, 11 (b) $\frac{4}{3}, \frac{5}{3}, \frac{6}{3}, \frac{7}{3}$

   (c) $\sum_1^5 2n + 3$ (d) $\{2n + 5\}$

   (e) {(1, 5), (2,7),(3, 9), (4, 11)} (f) 4 + 7 + 10 + 11+ . . . .

   (g) 2 + 4 + 8 + 16 + . . .

3. तल दिइएका अनुक्रमसँग सम्बन्धित श्रेणीलाई $\sum$ चिह्न प्रयोग गरी लेख्नुहोस् :

   (a) 2, 5, 8, 11, 14, 17, . . .20

   (b) -1, 2, -3, 4, -5, 6, -7

   (c) $(a-1), (a - 2)^2, (a -3)^3, \ldots, \ldots, (a - 14)^{14}$

4. मान पत्ता लगाउनुहोस् :

   (a) $\sum_1^3 3n$ (b) $\sum_1^4 (3n - 1)$

   (c) $\sum_3^6 (n^2 + 1)$ (d) $\sum_1^4 \frac{2n-1}{2n+1}$

एकाइ **2**

सीमान्त मान (Limit)

2.0 पुनरावलोकन (Review)

तलका प्रश्नहरू समूहमा छलफल गर्नुहोस् :

(a) $f(x) = x^2 - 2x + 3$ मा f(3) को मान कति हुन्छ ?

(b) फलन भनेको के हो ? फलन र सम्बन्ध बिच के फरक छ ?

(c) के सबै प्रकारका सम्बन्धहरू फलन हुन्छन् ?

(d) f ={(2,4), (5,25), (7, 49)} को क्षेत्र (domain) कति हुन्छ ?

(e) $y_n = 2n + 1$ का लागि $y_1, y_2, y_3,$ र y_4 को मान कति कति हुन्छ ?

(f) पदहरूको मान बढ्दो क्रममा भएको कुनै एउटा अनुक्रम के होला ?

(g) पदहरूको मान घट्दो क्रममा भएको कुनै एउटा अनुक्रम के होला ?

(h) एउटा फुटबल उफार्दा उक्त बल कति पटक उफ्रेपछि रोकिन्छ होला ?

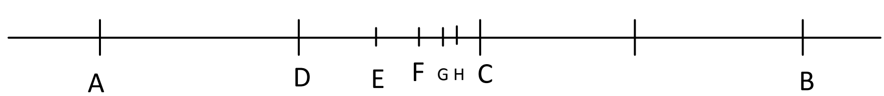
(i) n को मान बढाउँदै जाँदा $\frac{1}{n}$ को मान कति होला ?

(j) 50.457 लाई दशांश, सयांश र पूर्ण सङ्ख्यामा शून्यान्त गर्दा कुन कुन सङ्ख्या प्राप्त होलान् ?

2.1 साङ्ख्यिक अनुक्रम (Sequence of numbers)

- $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16},$ का थप दुई पदहरू के के होलान् ? समूहमा छलफल गरी पत्ता लगाउनुहोस् ।
- सामान्य पद (general term) $(-1)^n\frac{1}{3^n}$ भएको अनुक्रमको पहिला पाँच ओटा पदहरू के के होलान् ? छलफल गर्नुहोस् ।

  तल दिइएको क्रियाकलाप समूहमा गर्नुहोस् ।



चित्र न. 2.1

10 से.मि. लम्बाइ भएको एउटा रेखाखण्ड AB लिनुहोस् । उक्त रेखाखण्डको मध्यबिन्दु, C पत्ता लगाउनुहोस् । पुनः CA को मध्यबिन्दु D पत्ता लगाउनुहोस् । त्यस्तै रेखाखण्ड, CD को

मध्यबिन्दु E पत्ता लगाउनुहोस् । यही क्रममा EC, FC, GC ... का मध्यबिन्दुहरू क्रमशः F, G, H ... पत्ता लगाउनुहोस् ।

यही प्रक्रिया अगाडि बढाँउदा अन्तिम मध्यबिन्दु कुन बिन्दुको नजिक पुग्छ ? छलफल गर्नुहोस् ।

के AB, AC, AD, DE, EF, FG, GH,... को लम्बाइले $10, 5, \frac{5}{2}, \frac{5}{4}, \frac{5}{8}, \frac{5}{16}$ ....को अनुक्रम बनाउँछ ? छलफल गर्नुहोस् ।

यसरी प्राप्त हुने अन्तिम मध्यम बिन्दु र C बिचको दुरी लगभग शून्य (0) को बराबर हुन्छ ।

0 लाई अनुक्रम $10, 5, \frac{5}{2}, \frac{5}{4}, \frac{5}{8}, \frac{5}{16}$ .... को सीमान्त मान भन्दछन् । जुन "0" को लगभग बराबर (nearly '0') हुन्छ तर ठिक "0" हुँदैन ।

कुनै पनि अनुक्रमको अन्तिम पद कुनै निश्चित सङ्ख्याको नजिक पुग्छ तर ठिक त्यो सङ्ख्या हुँदैन । सङ्ख्या रेखामा कुनै वास्तविक सङ्ख्या दायाँतर्फ "+ ∞" र बायाँतर्फ "-∞" को नजिक पुग्छ । तर ठिक "∞" र "-∞" हुँदैन ।

अभ्यास 2.1

1. (क) 0.1, 0.01, 0.001,... को आठौँ पद कति होला ? पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ख) के माथि (क) को अनुक्रममा पदहरूको सङ्ख्या बढाउँदै जादा अन्तिम पद '0' को नजिक पुग्छ ?

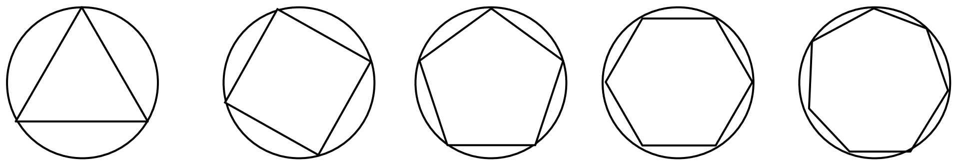
(ग) माथि (क) का अनुक्रमको सीमान्त मान कति हुन्छ ?

2. (क) 2.1, 2.01, 2.001, 2.0001, ... लाई कतिमा सीमान्त गर्न सकिन्छ ?

(ख) 1.9, 1.99, 1.999, 1.999,.... मा प्रत्येक पदको नजिकको पूर्ण सङ्ख्या कुन हो, लेख्नुहोस् ।

3. एउटा 8 से. मि. लामो रेखाखण्डलाई क्रमशः आधा आधा गर्दै आठ पटक आधा गर्नुहोस् । आधा गर्दा आउने स्थानहरूलाई सङ्ख्या रेखामा देखाउनुहोस् । यसबाट प्राप्त निष्कर्ष छोटकरीमा लेख्नुहोस् ।

2.2 चित्रीय अनुक्रम (Sequence of figures)



(i) (ii) (iii) (iv) (v)

चित्र न. 2.2

माथि दिइएका चित्रहरूका आधारमा तलका प्रश्नहरू समूहमा छलफल गर्नुहोस् :

(क) चित्र न. 2.2(i) मा त्रिभुज र वृत्तको क्षेत्रफलको फरक कति होला ?

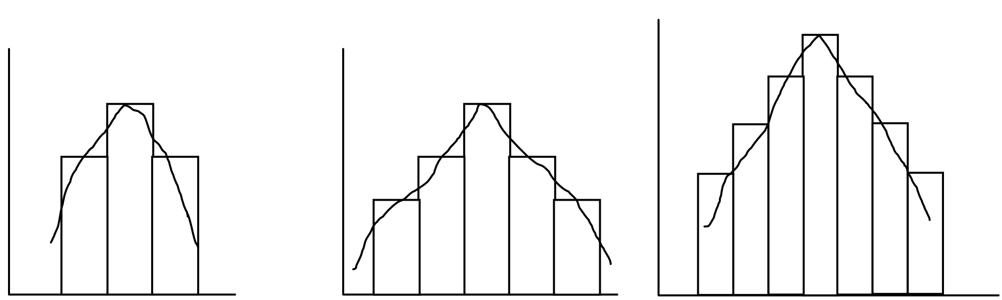
(ख) चित्र न. 2.2 (ii) र चित्र न. 2.2 (iii) मध्ये बहुभुज र वृत्तको क्षेत्रफलको फरक कुनमा कम होला ?

(ग) के चित्र न. 2.2 (iv) मा भन्दा चित्र न. 2.2 (v) मा वृत्त र बहुभजको क्षेत्रफलको फरक कम होला ?

(घ) माथिको अनुक्रममा वृत्तभित्र बनेको बहुभुजका भुजाहरूको सङ्ख्याहरू बढाउँदै जाँदा बहुभुज र वृत्तको क्षेत्रफलको फरक कति होला ?

वृत्तभित्र बहुभुजका जति भुजाहरूको सङ्ख्या बढाउँदै लग्यो उक्त बहुभुजको क्षेत्रफल, दिइएको वृत्तको क्षेत्रफलसँग नजिक हुँदै जान्छ ? कुन बेला बहुभुजको र वृत्तको क्षेत्रफल बराबर होला ? अथवा वृत्त र यसरी धेरै भुजा लिएर भनेको बहुभुजको क्षेत्रफलको फरक लगभग 0 नै हुन्छ । त्यसैले बहुभुजका भुजाहरू बढाउँदै जाँदा बनेको बहुभुजको क्षेत्रफलको सीमान्तर मान वृत्तको क्षेत्रफल हुन्छ ।

हामीले यस्ता वृत्ताकार आकृतिभित्र बनेका बहुभुजका ढाँचाहरू (Patterns) र टेसिलेसन सम्बन्धी आकृतिहरू आफ्नो घर, विद्यालय र अन्य कार्यालयमा पनि देख्ने गरेका छौँ । यी आकृतिहरूमा बहुभुजको सङ्ख्याहरू बढाउँदै जाँदा देखिने एकल चित्र वृत्त जस्तै हुन्छ । बहुभुजहरूको सङ्ख्या बढाउँदै जाँदा बन्ने एकल चित्रको सीमान्त मान वृत्त हुन्छ ।



(i) (ii) (iii)

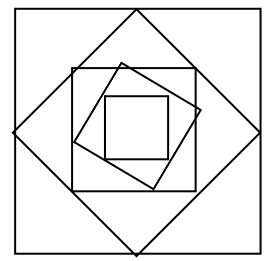
चित्र न. 2.3

माथिका हिस्टोग्राम वा प्रत्येक स्तम्भका मध्य बिन्दुहरू जोडेर जाने बारम्बारता वक्ररेखा (frequency polygon) को प्रकृतिका बारेका छलफल गर्नुहोस् ।

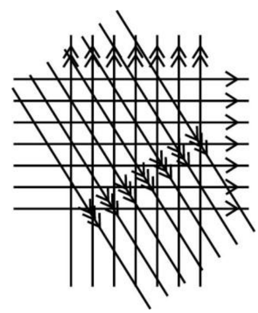
हिस्टोग्राममा स्तम्भहरूको सङ्ख्या कति पुग्दा उक्त वक्ररेखा सममितीय (symmetrical) हुन्छ होला ? छलफल गर्नुहोस् ।

हिस्टोग्राममा स्तम्भहरूको सङ्ख्या बढाउँदै गयो भने उक्त वक्र सममितीय (symmetrical) हुँदै जान्छ ।

अभ्यास : 2.2

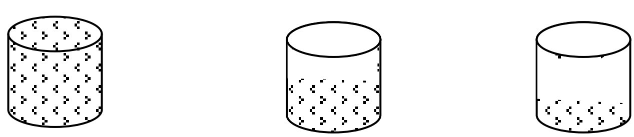


1. चित्रमा बाहिरी वर्गका मध्य बिन्दुहरू जोड्दा भित्री वर्ग बन्ने अनुक्रम देखाइएको छ । कति ओटा वर्गसम्म भित्री वर्गहरू बनाउन सकिन्छ होला ? यसरी बन्ने वर्गको क्षेत्रफल र परिमितिको सीमान्त मान के होला, लेख्नुहोस् ।



2. चित्रमा तिन थरी समानान्तर रेखाहरू एक आपसमा प्रतिच्छेदित भएका छन् । यी समानान्तर रेखाहरू प्रतिच्छेदित हुँदा कति ओटा त्रिभुजहरू बन्छन ? ती समानान्तर रेखाहरूको सङ्ख्या बढाउँदै जाँदा त्रिभुजका सङ्ख्याको सीमान्त मान के होला ? विश्लेषण गर्नुहोस् ।

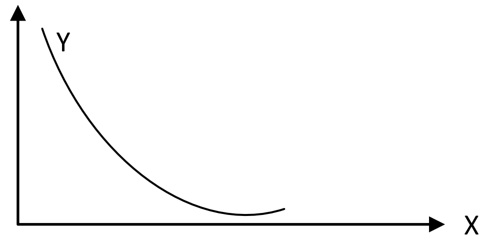
3. वृत्तभित्र बनाइएका बहुभुजका ढाँचाहरू कहाँ कहाँ देख्नुभएको छ ? सङ्कलन गर्नुहोस् । ती ढाँचाहरूमा के कस्ता आकृतिहरू छन् ? ती आकृतिहरूको सीमान्त चित्र के होला ? लेख्नुहोस् ।

4. 

माथिको चित्रमा गिलासमा भरी पानीलाई प्रत्येक पटक आधा आधा हुनेगरी पिउँदा कति पटकसम्म आधा भाग पानी पिउन सकिन्छ होला ? अन्तमा गिलासमा कति मात्रामा पानी बाँकी रहन्छ होला, लेख्नुहोस् ।

5. दिइएको लेखाचित्रमा X को मान बढाउँदै जाँदा Y को मा के कसरी फरक परेको छ ।
X को मान कति हुँदा Y को मा 0 को बराबर हुन्छ ?

यस्तो प्रकृतिको ग्राफ अन्यत्र हाम्रो दैनिक जीवनमा कहाँ कहाँ देख्न पाइन्छ ? छाटो प्रतिवेदन तयार गरी कक्षाकोठामा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।



2.3 असिमित श्रेणीको योगफल (Sum of infinite series):

चित्र न. 2.4

चित्रमा जस्तै OA = 2 एकाइ लिनुहोस् । OA को मध्यबिन्दु B पत्ता लगाउनुहोस् । त्यस्तै BA को मध्यबिन्दु C, CA को मध्यबिन्दु D, DA को मध्यबिन्दु E र EA को मध्यबिन्दु F लगातार पत्ता लगाउनुहोस् । यसरी कति पटकसम्म मध्यबिन्दु पत्ता लगाउन सकिन्छ ? के यसरी मध्यबिन्दु पत्ता लगाउँदा प्राप्त हुने अन्तिम मध्यबिन्दु A को नजिकै पुग्छ ? अथवा ठिक A नै हुन्छ । समूहमा छलफल गर्नुहोस् ।

माथिको चित्रमा

OA = 2 एकाइ

OB = BA = 1 एकाइ

BC = $\frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{2}$ एकाइ, OC = OB + BC = $\left(1 + \frac{1}{2}\right)$ एकाइ

CD = $\mathbf{\frac{1}{2}} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ एकाइ , OD = OB + BC + CD = $\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right)$ एकाइ

DE = $\frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$ एकाइ , OE = OB + B C +CD + DE = $\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}\right)$ एकाइ

EF = $\mathbf{\frac{1}{2}} \times \frac{1}{8} = \frac{1}{16}$ एकाइ , OF = OB + BC +CD + EF = $\left(\mathbf{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16}}\right)$ एकाइ

यसैगरी रेखाखण्ड OA लाई लगातार आधा गर्दै जाँदा बन्ने श्रेणी $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} \ldots$ हुन्छ । धेरैपटक विभाजन गर्दा अन्तमा हामी बिन्दु A को नजिक पुग्न सक्छौँ ।

यहाँ S_1 = OB = 1 एकाइ

S_2 = OC = $\left(1 + \frac{1}{2}\right)$ एकाइ

= 1.5 एकाइ

$S_3 = OD = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = 1.75$ एकाइ

$S_4 = OE$

$= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = 1.875$ एकाइ

$S_5 = OF$

$= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = 1.9375$ एकाइ

यसैगरी, $S_6, S_7, S_8, \ldots$ गर्दा "S_n" (n पटक आधा गर्दा) 2 को नजिक पुग्छ ।

यहाँ 2 लाई उक्त अनुक्रमको सीमान्त मान भनिन्छ । "S_n"ठिक 2 हुँदैन तर 2 को नजिकको मान हुन्छ ।

यसरी उक्त अुनक्रममा लगातार आउने पदहरूमध्ये अघिल्लो पद (preceding term) र पछिल्लो पद (succeeding term) को अनुपातको निरपेक्ष मान (absolute value) 1 भन्दा कम हुन्छ । त्यस्तो अनुक्रमको सीमान्त मान पत्ता लगाउन सकिन्छ ।

जस्तै : 1 + 3 + 9 + 27 + ..., को समान अनुपात $\frac{3}{1} = \frac{9}{3} = 3$ र समान अनुपातको निरपेक्ष मान (Absolute value) 1 भन्दा बढी हुनाले उक्त अनुक्रमको सीमान्त मान एक निश्चित सङ्ख्याद्वारा जनाउन सकिँदैन । तर अनुक्रम $-2 + 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \cdots$को समान अनुपात(common ratio)$\left(\frac{-1}{2}\right)$ र यसको निरपेक्ष मान $\frac{1}{2}$ (1 भन्दा सानो) भएकाले उक्त अनुक्रमको सीमान्त मान कुनै निश्चित वास्तविक सङ्ख्या हुन्छ ।

अनुक्रम $0.\overline{45}$ लाई 0.45 + 0.0045 + 0.000045 + ... अथवा $\frac{45}{100} + \frac{45}{10000} + \frac{45}{1000000} + \cdots$ अथवा $45 \times 10^{-2} + 45 \times 10^{-4} + 45 \times 10^{-6} + \ldots$

यसरी बनेको श्रेणी $45 \times 10^{-2} + 45 \times 10^{-4} + 45 \times 10^{-6} + \ldots$ को अन्तिम पद 0 को नजिकको धनात्मक सङ्ख्या हुन्छ । अथवा यस श्रेणीको n औँ पदको निरपेक्ष मान 0 हुन्छ ।

अभ्यास 2.3

1. तल दिइएका कुन कुन अनुक्रमको सीमान्त मान एक निश्चित वास्तविक सङ्ख्याको हुन्छ, लेख्नुहोस् ।

(a) 16 – 8 + 4 – 2 + . . .

(b) -8 +4+ (-2) + . . . +$\left(-\frac{1}{32}\right) + \cdots$

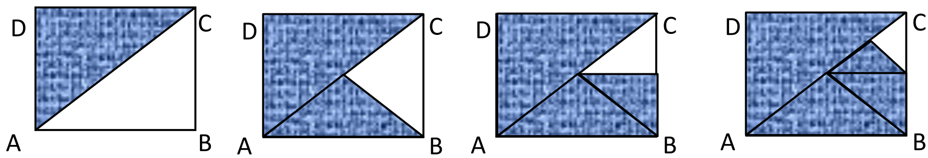
(c) 4 + 2 + 1 + . . .

(d) 8 + 40 + 200 + . . .

(e) 0.6 + 0.06 + 0.006 + ...

(f) $0.\overline{78}$

2. चित्रमा भुजाको लम्बाइ 1 एकाइ भएको वर्गलाई आधा गर्दै जाने क्रममा बनेको भागलाई छाया पारेर देखाइएको छ । यसरी बन्ने छाया पारेका प्रत्येक नयाँ भागको अनुक्रम के होला ? यदि उक्त अनुक्रमले वर्गको क्रम (पहिलो, दोस्रो, ...) लाई जनाउँछ र S_n ले तिनीहरूको छाया पारेको भागको क्षेत्रफललाई जनाउँछ भने तल दिइएको तालिका भर्नुहोस् :



पहिलो दोस्रो तेस्रो चौथौ

n	S_n
1	....
2	.....
3	....
4	....
5	.....
6	.....

3. तलका अनुक्रमको n औँ पद (t_n) दिइएको अवस्थामा पहिलो 5 ओटा पदहरू पत्ता लगाई सीमान्त मानसमेत लेख्नुहोस् ।

(a) $t_n = \frac{1}{2^n}$ (b) $t_n = \frac{1}{n+1}$

(c) $t_n = \frac{1}{n} + \frac{(-1)^n}{n}$ (d) $t_n = 1 + \frac{(-1)^n}{2n^2}$

2.4 फलनको सीमान्त मान (Limit of function)

f(x) = x+ 1 का लागि तल दिइएको तालिका समूहमा छलफल गरी भर्नुहोस् :

x	f(x)	(x, f(x))
-1	0	(-1,0)
-2	. . . . .	. . . . .
0	. . . . .	. . . . .
1	. . . . .	. . . . .
2	. . . . .	. . . . .
3	. . . . .	. . . . .
4	. . . . .	. . . . .
5	. . . . .	. . . . .

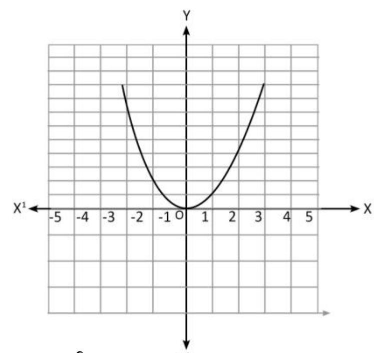
f(x) = x + 1 लाई लेखाचित्रमा देखाउँदा कस्तो आकृति बन्छ ? के f(x) = x + 1 मा प्रत्येक x का लागि फरक $f(x)$ छ ? छलफल गर्नुहोस् ।

f(x) = x+ 1 मा $\boldsymbol{x}$ लाई आगत ('input') र f($\boldsymbol{x}$) लाई निर्गत ('output') अथवा फलनको मान (value of function) भनिन्छ ।

कुनै वस्तुको उचाइ, मूल्य आदि पत्ता लगाउन फलनको प्रयोग कसरी हुन्छ ? समूहमा छलफल गर्नुहोस् । यसैगरी के f(x)=$\frac{x^2-4}{x-2}$ मा f(2) पत्ता लगाउन सकिन्छ ? छलफल गर्नुहोस् । $\boldsymbol{x}$ = 2 नभएको अवस्थामा के f(x)=$\frac{x^2-4}{x-2}$ र f(x) = x + 2 ले एउटा मान दिन्छन् ?

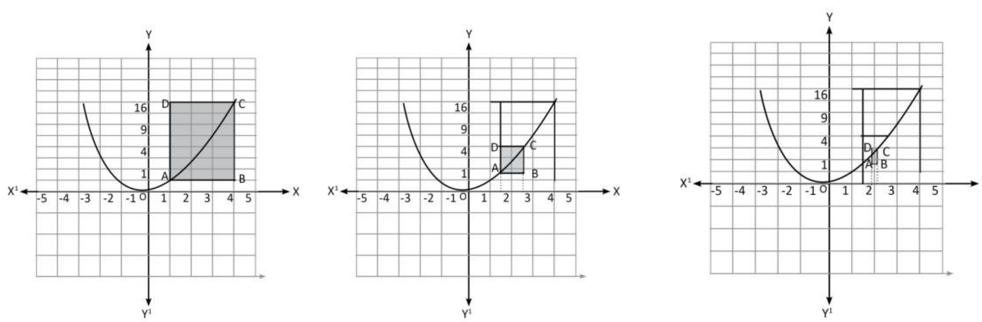
चित्रमा y = $f(x)$

= x^2 लाई देखाइएको छ ।



चित्र न. 2.5

x को मान 1 देखि 4 सम्म लिँदा $f(x)$ को मान कति हुन्छ ? चित्र हेरी समूहमा छलफल गर्नुहोस् ।



(i) *(ii)* *(iii)*

चित्र न. 2.6

- चित्र 2.6(i) मा x_1 = 1 र x_2 = 4 लिँदा आयत ABCD को क्षेत्रफल कति होला ? जहाँ AB = 3 एकाइ र BC = 15 (एकाइ) छ ।
- चित्र 2.6(ii) मा x_1 = 1.5 र $\boldsymbol{x_2}$= 2.5 लिँदा AB = 1 एकाइ र BC = 4 एकाइ हुन्छ । ABCDको क्षेत्रफल कति होला ?
- चित्र 2.6(iii) मा x_1 = 1.9 र $\boldsymbol{x_2}$ = 2.1 लिँदा AB = 0.2 एकाइ र BC = 0.80 एकाइ हुन्छ । आयत ABCD को क्षेत्रफल कति होला ?
- $\boldsymbol{x_1}$ र $\boldsymbol{x_2}$ लगभग 2 को नजिक पुग्दा उक्त आयतको क्षेत्रफल कति होला ? छलफल गर्नुहोस् ।

यसरी x_1 र x_2 क्रमशः 2 को नजिक पुग्दा आयत ABCD बिन्दु 4 मा सीमित भएको जस्तै देखिन्छ ।

त्यसैले $f(x) = x^2$ मा $f(2) = 4$, बिन्दु 2 मा फलनको मान हो भने x_1 र x_2 दुवै 2 को नजिक पुग्दा आयतको स्थान y– अक्षमा बिन्दु 4 मा देखिनु फलन $f(x)$ को बिन्दु $x = 2$ मा सीमान्त मान हो । एउटा फलनको कुनै निश्चित बिन्दुमा प्राप्त y – निर्देशाङ्क (output) उक्त फलनको मान हो भने उक्त निश्चित बिन्दुको सबभन्दा नजिकको बिन्दुमा पत्ता लगाइएको मान सीमान्त हो ।

अभ्यास 2.4

1. (a) यदि $f(x) = 2x\text{-}1$ भए $f(2)$ र $f(1.99)$ को मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

   (b) यदि $f(x) = 2x$ भए $f(3)$ र $f(2.99)$ को फरक कति हुन्छ । पत्ता लगाउनुहोस् ।

   (c) $f(x) = 3x + 1$ मा $f(4.99)$ र $f(5.07)$ लाई कुन पूर्ण सङ्ख्यामा शून्यान्त गर्न सकिन्छ, लेख्नुहोस् ।

2. (a) (i) $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$ मा के $f(1)$ ले कुनै निश्चित वास्तविक सङ्ख्यालाई जनाउँछ ?

   (ii) x =1.1, 1.01, 1.001 लिँदा $f(x)$ का मान के के हुन्छन् ? पत्ता लगाउनुहोस् ।

   (iii) x = 0.9, 0.99, 0.999 लिँदा $f(x)$ का मान के के हुन्छन् ? पत्ता लगाउनुहोस् ।

   (iv) (ii)र (iii) बाट प्राप्त $f(x)$ का मानहरूलाई कुन पूर्ण सङ्ख्यामा शून्यान्त गर्न सकिन्छ ?

   (b) तल दिइएको तालिका भर्नुहोस् :

x	0.1	0.001	0.0001	0.0001	0.00001	0
f(x) =2x+ 3	. . . . .	. . . . .	. . . . .	. . . . .	. . . . .	. . . . .
x	-0.1	-0.01	-0.001	-0.0001	-0.00001	0
$f(x) = 2x + 3$						

3. एउटा कलमलाई, आँखाभन्दा 40 से.मि. टाढा राख्नुहोस् । उक्त कलमलाई आँखाभन्दा क्रमशः 20 से.मि.र 10 से.मि. नजिक ल्याउँदा 40 से.मि. टाढा भएको अवस्थामा भन्दा के भिन्नता देख्नुभयो लेख्नुहोस् । उक्त कलम आँखालाई छुनेगरी नजिकै राख्यो भने के कलम त्यो आँखाले देख्न सक्छ ? अब यो क्रियाकलापलाई सीमान्त मानसँग कसरी जोड्न सकिन्छ ? विश्लेषण गर्नुहोस् र उक्त विश्लेषणलाई कक्षाकोठामा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

2.5 सीमान्त मानको साङ्केतिक प्रस्तुति (Notational representation of limit)

तपाइँ एउटा कोठामा प्रवेश गर्दै हुनुहुन्छ । ठिक ढोका अगाडि आइपुग्दा कोठाभित्रबाट एक जनाले तपाइँलाई कहाँ हुनुहुन्छ, कतिखेर कोठामा पुग्नुहुन्छ भनी फोन गरे भने के कस्तो जवाफ दिनुहुन्छ होला ? कक्षाकोठामा छलफल गर्नुहोस् ।

तल दिइएको तालिका भर्नुहोस् :

x	1	1.5	1.9	1.99	1.999	2.1	2.01	2.0001	2.0001
$f(x) = x + 3$	...	...	...	...	...	...	...	...	...

माथिको तालिकामा हेरी तल दिइएका प्रश्नहरूको जवाफ लेख्नुहोस् :

(a) $x = 1.99$ मा $f(x) = x + 3$ को मानलाई कुन पूर्ण सङ्ख्यामा शून्यान्त गर्न सकिन्छ ?

(b) $x = 2.07$ मा $f(x) = x + 3$ को मानलाई कुन पूर्ण सङ्ख्यामा शून्यान्त गर्न सकिन्छ ?

(c) 1.99 र 2.0 लाई कुन पूर्ण सङ्ख्यामा शून्यान्त गर्न सकिन्छ ?

(d) $x = 2$ मा $f(x)$ को मान कति हुन्छ ? माथिका क्रियाकलापबाट हामी 1.99 र 2.01 लाई 2 को नजिकै पुग्दा $f(x)$ पनि 5 को नजिकै पुग्छ भनी पढ्न सक्छौँ ।

यदि कुनै सङ्ख्या (x) दायाँ अथवा बायाँबाट 'a' को नजिक पुग्दा f(x) पनि f(a) को नजिक पुग्छ । यसलाई यदि $x \rightarrow$ a भए $f(x) \rightarrow f$(a) लेख्न सकिन्छ । [If x approaches or x tends to a then f(x) approaches to f(a) or f(x) tends to f(a)] यसलाई साङ्केतिक रूपमा लेख्दा limit $x \rightarrow$a, $f(x) = f$(a) हुन्छ । पढ्दा limit x tends to a, $f(x)$ equals to f(a) भनी पढिन्छ ।

माथिका क्रियाकलापमा 1.99 र 2.07 लाई पूर्ण सङ्ख्याका शून्यान्त गर्दा $x \rightarrow 2$ लेख्न सकिन्छ ।

अभ्यास 2.5

1. (a) फलनको मान भन्नाले के बुझिन्छ ? उदाहरणसहित लेख्नुहोस् ।

   (b) फलनको सीमान्त मान भन्नाले के बुझिन्छ ? उदाहरणसहित लेख्नुहोस् ।

   (c) असीमित श्रेणीको कुनै एउटा उदाहरण लेख्नुहोस् ।

2. (a) 3.004 र 5.005 लाई कुन कुन पूर्ण सङ्ख्यामा शून्यान्त गर्न सकिन्छ, लेख्नुहोस् ।

   (b) 1.0001 र 0.999 लाई कुनै एउटै पूर्ण सङ्ख्यामा शून्यान्त गर्न सकिन्छ, लेख्नुहोस् ।

3. तल दिइएका गणितीय वाक्यहरूलाई सङ्केतमा लेख्नुहोस् :

   (a) x, 4 को नजिकै पुग्दा (x approaches to 4)

   (b) y, 5 को नजिकै पुग्दा (y tends to 5)

4. तल दिइएका सङ्केतहरूलाई वाक्यमा लेख्नुहोस् :

(a) $x \to 2$ (b) $x \to 3$ (c) $x \to a$ (d) lim $x \to 2$, $f(x)$

(e) lim $x \to 3$, $f(x)$ (f) lim $x \to 2$, $f(x) = 9$ (g) limit $x \to a$, g(x) = g(a)

5. तल दिइएको तालिका पूरा गर्नुहोस् :

(a)

x	0.99	0.99	0.999	1.001	1.0001	$x \to 1$
f(x) = $\frac{x-1}{x^2-1}$	. . . . .	. . . . .	. . . . .	. . . . .		f(x) $\to \frac{1}{2}$

(b)

x	0.99	0.999	1.01	1.00	x $\to$
f(x) = $\frac{x^2-1}{x-1}$	. . . .	. . . . .	. . . . .	. . . . .	f(x) $\to$

(c)

x	0.99	0.999	1.01	1.007	$x \to$
f(x) = $\frac{x^3-1}{x-1}$	. . . . .	. . . . .	. . . . .	. . . . .	f(x) $\to$

6. हाम्रो दैनिक जीवनमा प्रयोग हुने सीमान्त मानसँग सम्बन्धित कुनै चार ओटा उदाहरणहरू खोजी कक्षाकोठामा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

एकाइ **3**

मेट्रिक्स (Matrix)

3.0 पुनरावलोकन (Review)

तल दिइएको महिनाको पात्रो र सामानहरू किनेको बिल अवलोकन गरी निम्न प्रश्नहरूमा छलफल गर्नुहोस् ।

सि.न.	सामान	परिमाण (kg)	दर (रु.)	जम्मा रकम (रु.)
1.	चिनी	5	90	450
2.	चिउरा	2	70	140
3.	दाल	3	180	720
4.	नुन	5	20	100

(a) माथिको पात्रोमा 22 गते कुन बार पर्छ ? कसरी पत्ता लगाउन सकिन्छ ?

(b) यो महिनामा शनिबार कति कति गते पर्छ ?

(c) यो महिनामा बिहीबार कति ओटा पर्छन् ?

(d) यो बिलअनुसार कुन कुन सामान किनिएको रहेछ ?

(e) कुन सामानको दर कति रहेछ ?

(f) कुन सामान कति ओटा किनिएको रहेछ ? उपयुक्त विवरणका सङ्ख्याहरू मात्र कसरी राख्न सकिन्छ ? अभ्यास गरेर हेर्नुहोस् ।

3.1 मेट्रिक्सको परिचय (Introduction to matrix)

तिन जना विद्यार्थीहरूको स्तरीकृत अङ्क (Grade point) निम्नानुसार छ :

विद्यार्थीको नाम	विषय		
	गणित	विज्ञान	नेपाली
कुसुम	3.2	3.6	3.6
कपिल	3.6	3.2	2.8
सागर	3.6	4.0	3.2

यस तालिकालाई निम्नानुसार लेख्न सकिन्छ :

$$\begin{bmatrix} 3.2 & 3.6 & 3.6 \\ 3.6 & 3.2 & 2.8 \\ 3.6 & 4.0 & 3.2 \end{bmatrix}$$

यहाँ प्रत्येक विद्यार्थीको तिन ओटा विषयमा प्राप्त गरेको स्तरीकृत अङ्कलाई तेर्सो लाइनमा राखिएको छ, यसलाई पङक्ति (row) भनिन्छ । पुनः कुनै एउटा विषयमा विद्यार्थीले प्राप्त गरेको स्तरीकृत अङ्कलाई ठाडो लाइनमा राखिएको छ जसलाई लहर (column) भनिन्छ । यसरी पङ्क्ति र लहरमा रहेका सङ्ख्यालाई ( ), [ ] वा || || चिह्नभित्र बन्द गरी राखिएको आयाताकार प्रस्तुतिलाई मेट्रिक्स भनिन्छ ।

उपर्युक्त मेट्रिक्सलाई लहर र पङ्क्तिमा देखाउँदा,

पहिलो लहर	दोस्रो लहर	तेस्रो लहर	
↓	↓	↓	
3.2	3.6	3.6	→ पहिलो पङ्क्ति
3.6	3.2	2.8	→ दोस्रो पङ्क्ति
3.6	4.0	3.2	→ तेस्रो पङ्क्ति

पङ्क्ति र लहरका रूपमा रहेका सङ्ख्याहरूको आयातकार प्रस्तुतिलाई मेट्रिक्स (Matrix) भनिन्छ । मेट्रिक्सलाई [ ], '|| ||' वा ( ) सङ्केतद्वारा बन्द गरिन्छ । सामान्यतया मेट्रिक्सलाई अङ्ग्रेजी वर्णमालाका ठुला अक्षरहरू A, B, C... इत्यादिले जनाइन्छ । मेट्रिक्सका सदस्यहरू (elements) लाई अङ्ग्रेजी वर्णमालाका साना अक्षरहरू a, b, c, d... इत्यादिले जनाइन्छ ।

(क) मेट्रिक्सको क्रम (order of matrix)

सामान्यतया कुनै मेट्रिक्सलाई निम्नानुसार लेखिन्छ :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = [a_{ij}]_{3\times 3}$$

माथिका मेट्रिक्समा लहर (column) र पङ्क्ति (row) को सङ्ख्या कति कति छन् ? दिइएको मेट्रिक्समा लहर (column) र पङ्क्ति (row) छुट्याउनुहोस् ।

यहाँ मेट्रिक्स A मा तिन ओटा पङ्क्ति र तिन ओटा लहर छन् । यो मेट्रिक्सलाई 3 × 3 मेट्रिक्स भनिन्छ । यहाँ मेट्रिक्सको क्रम 3 x 3 हो । यसलाई $A_{3\times3}$ मेट्रिक्स लेखिन्छ अर्थात्

$$A_{3\times3} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

यसैगरी, $P = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 3 \\ 6 & 2 & 5 \end{bmatrix}$ र $Q = \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{31} \end{bmatrix}$

यहाँ, मेट्रिक्स P मा दुई ओटा पङ्क्ति (row) र तिन ओटा लहर (column) छन् । त्यसैले मेट्रिक्स P को क्रम 2×3 हुन्छ भने मेट्रिक्स Q मा तिन ओटा पङक्ति र एउटा लहर छ । त्यसैले यसको क्रम 3×1 हुन्छ ।

कुनै पनि मेट्रिक्सको पङ्क्तिको सङ्ख्या × लहरको सङ्ख्यालाई त्यो मेट्रिक्सको क्रम भनिन्छ ।

$A_{m\times n}$ मेट्रिक्सको क्रममा पहिलो सङ्ख्या m ले पङ्क्ति सङ्ख्या र दोस्रो सङ्ख्या n ले लहर सङ्ख्या जनाउँछ ।

उदाहरण- 1

तलका मेट्रिक्सहरूको क्रम पत्ता लगाउनुहोस् :

(a) $P = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ (b) $Q = \begin{bmatrix} 9 \\ 8 \\ 7 \end{bmatrix}$

(c) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 7 & 8 & 9 \\ 4 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ (d) $B = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -4 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$

समाधान

(a) मेट्रिक्स P मा एउटा पङ्क्ति र तिन ओटा लहर भएकाले यसको क्रम 1 × 3 हो ।

(b) मेट्रिक्स Q मा तिन ओटा पङ्क्ति र एउटा लहर भएकाले यसको क्रम 3 × 1 हो ।

(c) मेट्रिक्स A मा तिन ओटा पङ्क्ति (row) र तिन ओटा लहर (Column) भएकाले यसको क्रम 3 × 3 हो ।

(d) मेट्रिक्स B मा तिन ओटा पङ्क्ति र दुई ओटा लहर भएकाले यसको क्रम 3 × 2 हो ।

(ख) **मेट्रिक्सका अङ्गहरू (Components of matrix)**

तलको मेट्रिक्स अध्ययन गर्नुहोस् :

$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}$ मा समावेश भएको a, b, c, d, e, f प्रत्येक मेट्रिक्स A का अवयव वा सदस्यहरू (elements) हुन् । सामान्यतया मेट्रिक्सलाई

$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ ले जनाइन्छ ।

यहाँ a_{11}, a_{12}, a_{13} ... सदस्यहरूलाई यस रूपमा प्रस्तुत गर्दा मेट्रिक्सका कुनै पनि सदस्यको पङ्क्ति र लहर सजिलै पत्ता लगाउन सकिन्छ, जस्तै a_{11} पहिलो पङ्क्ति र पहिलो लहरमा पर्छ । a_{21} दोस्रो पङ्क्ति र पहिलो लहरमा पर्छ, त्यस्तै a_{23} दोस्रो पङ्क्ति र तेस्रो लहरमा पर्छ । यसरी मेट्रिक्सका सदस्यहरूलाई a_{mn} का रूपमा लेख्ने गरिन्छ, जहाँ m पङ्क्ति र n लहरको सङ्ख्या हो ।

उदाहरण 2

यदि $A = \begin{bmatrix} 7 & 9 & 12 \\ 2 & 4 & 9 \\ 10 & 11 & 12 \end{bmatrix}$ भए

(a) मेट्रिक्स A का सदस्य सङ्ख्या लेख्नुहोस् ।

(b) मेट्रिक्स A को क्रम कति होला ?

समाधान

(a) मेट्रिक्स A मा 9 ओटा सदस्यहरू छन् ।

(b) मेट्रिक्स A को क्रम 3 x 3 हो ।

उदाहरण 3

मेट्रिक्स $P = \begin{bmatrix} 8 & 12 & 16 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$ भए मेट्रिक्स P का सदस्यहरूलाई a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{21}, a_{22} र a_{23} गरी लेख्ने हो भने a_{11}, a_{12}, a_{22} र a_{23} को मान कति कति हुन्छ ? पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान

मेट्रिक्स P का सदस्यहरूलाई a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{21}, a_{22} र a_{23} को रूपमा लेख्दा

$P = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$ हुन्छ र $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 12 & 16 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$

अब दुवै मेट्रिक्सका सङ्गत सदस्यहरू बराबर भएकाले

$\therefore a_{11} = 8,\quad a_{12} = 12,\quad a_{13} = 16$

$a_{21} = 1,\quad a_{22} = 3,\quad a_{23} = 5$

अभ्यास 3.1

1. (a) मेट्रिक्स भनेको के हो ? यसलाई जनाउने सङ्केत पनि लेख्नुहोस् ।

   (b) मेट्रिक्सको क्रम भन्नाले के बुझिन्छ ? उदाहरणसहित लेख्नुहोस् ।

   (c) मेट्रिक्सका अवयवहरूलाई केले जनाइन्छ ? एउटा उदाहरण दिनुहोस् ।

   (d) यदि P = $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$ भए मेट्रिक्स P का सदस्य सङ्ख्या लेख्नुहोस् ।

2. तलका मेट्रिक्सको क्रम पत्ता लगाउनुहोस् :

   (i) A = $\begin{bmatrix} 11 & 12 & 13 \\ 14 & 15 & 16 \\ 17 & 18 & 19 \end{bmatrix}$ (ii) B = $\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{bmatrix}$

   (iii) C = $\begin{bmatrix} i & o & u \end{bmatrix}$ (iv) D = $\begin{bmatrix} 13 \\ 10 \\ 7 \end{bmatrix}$

3. यदि M = $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}$ भए मेट्रिक्स M को क्रम कति हो ? यसलाई क्रमको सङ्केतमा पनि देखाउनुहोस् ।

4. A = $\begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 5 \\ 3 & 7 & 9 \end{bmatrix}$ भए मेट्रिक्स A का सदस्यहरूलाई a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_{31}, a_{32} र a_{33} को रूपमा लेख्दा a_{11}, a_{22}, र a_{32}को मान कति कति हुन्छ, लेख्नुहोस् ।

5. तिन जना विद्यार्थीहरूले तिन विषयमा प्राप्त गरेको स्तरीकृत अङ्क (grade point) लेखी एउटा मेट्रिक्स बनाउनुहोस् । त्यसको क्रम र अवयवहरू साथीहरूसँग छलफल गरी पत्ता लगाउनुहोस् ।

3.2 मेट्रिक्सका प्रकारहरू (Types of Matrices)

मेट्रिक्सको बनावट (structure) अनुसार मेट्रिक्सहरूलाई निम्नानुसार वर्गीकरण गर्न सकिन्छ :

(a) पङ्क्ति मेट्रिक्स (Row Matrix)

तलका मेट्रिक्सहरू अध्ययन गरी निम्न प्रश्नहरूमा छलफल गर्नुहोस् :

$M = [a_{11} \quad a_{12}]$

$P = [10 \quad 20 \quad 30]$

(i) मेट्रिक्स M र P को क्रम कति छ ?

(ii) यिनीहरूमा कति ओटा पङ्क्ति र कति ओटा लहर छन् ?

यी दुवै मेट्रिक्सहरूको एउटा मात्र पङ्क्ति छ । यसरी एउटा मात्र पङ्क्ति भएको मेट्रिक्सलाई पङ्क्ति मेट्रिक्स (row-matrix) भनिन्छ, जस्तै :

$A = [2 \quad 4 \quad 6 \quad 8]$ पनि एउटा 1×4 क्रमको पङ्क्ति मेट्रिक्स हो । यसैगरी एउटा मात्र पङ्क्ति र n ओटा लहर भएको मेट्रिक्सको क्रम कति होला ? छलफल गर्नुहोस् ।

(b) लहर मेट्रिक्स (Column Matrix)

तलका मेट्रिक्सहरूको अध्ययन गरी छलफल गर्नुहोस् :

$A = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{12} \end{bmatrix}$, $\quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$

उपर्युक्त मेट्रिक्सको क्रम लेख्नुहोस् । यिनीहरूका पङ्क्ति र लहर कति कति ओटा छन् ? यी दुवै मेट्रिक्समा एउटा मात्र लहर छ । यसरी एउटा मात्र लहर भएको मेट्रिक्सलाई लहर मेट्रिक्स (column matrix) भनिन्छ, जस्तै :

$C = \begin{bmatrix} 6 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}$ एउटा 3×1 क्रम भएको लहर मेट्रिक्स हो ।

यसैगरी m ओटा पङ्क्ति र एउटा मात्र लहर भएको मेट्रिक्सको क्रम कति होला ? छलफल गर्नुहोस् ।

(c) वर्ग मेट्रिक्स (Square Matrix)

तलका मेट्रिक्सहरू अध्ययन गर्नुहोस् :

$A = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$

$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}$

(i) मेट्रिक्स A र B को क्रम कति कति हुन्छ ?

(ii) यिनीहरूको पङ्क्ति र लहर सङ्ख्या कति कति छ ?

यी दुवै मेट्रिक्समा लहर र पङ्क्तिको सङ्ख्या बराबर छ । यसरी पङ्क्ति र लहरको सङ्ख्या बराबर भएका मेट्रिक्सलाई वर्गाकार मेट्रिक्स (square matrix) भनिन्छ ।

जस्तै : P = $\begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 \end{bmatrix}$, Q = $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$

(d) आयताकार मेट्रिक्स (Rectangular matrix)

तलका मेट्रिक्सहरू अध्ययन गर्नुहोस् :

M = $\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix}$, N = $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$

उपर्युक्त मेट्रिक्सहरूको क्रम कति कति छ ? यिनीहरूको लहर र पङ्क्तिको सङ्ख्या कति कति छ ? यहाँ उपर्युक्त दुवै मेट्रिक्समा लहर र पङ्क्तिको सङ्ख्या फरक फरक छ । यसरी पङ्क्तिको सङ्ख्या र लहरको सङ्ख्या समान नभएको मेट्रिक्सलाई आयाताकार मेट्रिक्स (Rectangular matrix) भनिन्छ, जस्तै :

M = $\begin{bmatrix} 3 & 6 & 8 \\ 0 & 5 & 2 \end{bmatrix}$, N = $\begin{bmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 4 & 3 & 3 \\ 6 & 0 & 6 \\ 1 & 5 & 1 \end{bmatrix}$ भनिन्छ ।

(e) शून्य वा खाली मेट्रिक्स (Zero/Null Matrix)

तलका मेट्रिक्सहरू अध्ययन गरी छलफल गर्नुहोस् :

A = $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{3\times3,}$ B = $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{2\times1}$

(i) मेट्रिक्स A र B को क्रम कति कति हुन्छ ?

(ii) मेट्रिक्स A र B का सदस्यहरू कति छन् ?

माथिका दुवै मेट्रिक्स A र B मा सबै सदस्यहरू शून्य छन् । यसरी सबै सदस्य शून्य भएको मेट्रिक्सलाई शून्य वा खाली मेट्रिक्स (zero/null matrix) भनिन्छ । अथवा कुनै पनि मेट्रिक्सका सम्पूर्ण सदस्यहरू शून्य (zero) भएको मेट्रिक्सलाई शून्य मेट्रिक्स भनिन्छ ।

(f) विकर्ण मेट्रिक्स (Diagonal Matrix)

तलका मेट्रिक्सहरू अध्ययन गरी छलफल गर्नुहोस् :

A = $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$, B = $\begin{bmatrix} a & o \\ o & b \end{bmatrix}$ [a ≠ 0, b ≠ 0]

(i) माथि दिइएका मेट्रिक्सहरूका अवयवहरू कति ओटा छन् । ती के के हुन् ?

(ii) मेट्रिक्स A र B मा भएका मुख्य विकर्णहरूमा के के सदस्य छन् ? मेट्रिक्स A र B मा पङ्क्ति र लहरको सङ्ख्या कति कति छ ? मेट्रिक्स A र B मा भएका सदस्यहरूमा पहिलो सदस्यबाट अन्तिम सदस्यसम्म खिचिएको अवयव नै विकर्ण हो । यसरी उपर्युक्त मेट्रिक्सहरूमा मुख्य विकर्ण (leading diagonal) (a_{11} बाट सुरु भएको विकर्ण) पर्ने सदस्यबाहेक अन्य सबै सदस्यहरू शून्य (zero) भएको वर्गाकार मेट्रिक्सलाई विर्कण मेट्रिक्स (diagonal matrix) भनिन्छ । माथिका मेट्रिक्सहरू विर्कण मेट्रिक्सहरू हुन् । यस्तै अन्य मेट्रिक्सहरू लेख्नुहोस् ।

(g) स्केलर मेट्रिक्स (Scalar Matrix)

तलका मेट्रिक्सहरू अध्ययन गरी निम्न प्रश्नहरूमाथि छलफल गर्नुहोस् :

$$M = \begin{bmatrix} 11 & 0 & 0 \\ 0 & 11 & 0 \\ 0 & 0 & 11 \end{bmatrix}, \qquad N = \begin{bmatrix} k & o \\ o & k \end{bmatrix}, \quad [k \neq 0]$$

(i) मेट्रिक्स M र N को क्रम कति कति छ ?

(ii) उपर्युक्त मेट्रिक्स M मा मुख्य विकर्णका सदस्य कुन कुन हुन् ?

(iii) तिनीहरूको मान कति कति छ ?

यसरी मुख्य विकर्णका सबै सदस्यहरू एउटै (बराबर) भएको विकर्ण मेट्रिक्सलाई स्केलर मेट्रिक्स भनिन्छ । माथिका मेट्रिक्सहरू स्केलर मेट्रिक्सहरू हुन् । यस्तै अन्य मेट्रिक्सहरू लेख्नुहोस् ।

(h) एकाइ वा एकात्मक मेट्रिक्स (Unit or Identity Matrix)

तलका मेट्रिक्सहरू अध्ययन गरी छलफल गर्नुहोस् :

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{3 \times 3}, \qquad I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_{2 \times 2}$$

(i) के I_3 र I_2 विकर्ण मेट्रिक्स हुन् ?

(ii) विकर्णमा पर्ने सदस्यहरू के के हुन् ?

मेट्रिक्स I_3 र I_2 मा मुख्य विकर्णका प्रत्येक सदस्यहरू एकाइ (1) र बाँकी अवयवहरू शून्य छन् । त्यसैले मुख्य विकर्णका प्रत्येक सदस्यहरू एकाइ (1) भएको विकर्ण मेट्रिक्सलाई एकात्मक वा एकाइ मेट्रिक्स (identity or unit matrix) भनिन्छ ।

(i) त्रिभुजकार मेट्रिक्स (Triangular Matrix)

तलका मेट्रिक्सहरू अध्ययन गरी छलफल गर्नुहोस् :

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ o & c \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} a & b & c \\ o & d & e \\ o & o & f \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} a & o \\ b & c \end{bmatrix}, \text{ र } D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix} \quad [a, b, c, d, e, f \neq 0]$$

यी मेट्रिक्सका विशेषताहरू खोजी गर्नुहोस् । यहाँ, मेट्रिक्स A र B मा मुख्य विकर्णभन्दा तलपट्टिका सदस्यहरू शून्य छन् । यसरी मुख्य विकर्णभन्दा तलपट्टिका सदस्यहरू शून्य भएको वर्गाकार मेट्रिक्सलाई माथिल्लो त्रिभुजाकार मेट्रिक्स (upper tringular matrix) भनिन्छ । त्यसैगरी माथिका मेट्रिक्सहरू C र D मा मुख्य विर्कणभन्दा माथिका सदस्यहरू शून्य छन् । यसरी मुख्य विकर्णभन्दा माथिपट्टिका सदस्यहरू शून्य भएको वर्गाकार मेट्रिक्सलाई तल्लो त्रिभुजाकार मेट्रिक्स भनिन्छ । समग्रमा मुख्य विकर्णभन्दा माथि वा तलपट्टिका सदस्यहरू शून्य भएको वर्गाकार मेट्रिक्सलाई त्रिभुजाकार मेट्रिक्स भनिन्छ । यस्तै अन्य त्रिभुजाकार मेट्रिक्सहरू लेख्नुहोस् ।

(j) सममिति मेट्रिक्स (Symmetric Matrix)

तलका मेट्रिक्सहरू अध्ययन गरी प्रश्नहरूमा छलफल गर्नुहोस :

A = $\begin{pmatrix} x & y \\ y & z \end{pmatrix}$, B = $\begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 8 \\ 3 & 8 & 1 \end{pmatrix}$

(i) मेट्रिक्स A र B का विशेषताहरू के के छन् ?

(ii) यिनीहरूका लहर र पङ्क्ति साटासाट (inter change) गर्दा के फरक पर्छ ?

यहाँ मेट्रिक्स A र B मा लहर (column) लाई पङ्क्ति (row) मा परिवर्तन गर्दा फेरि उही मेट्रिक्स हुन्छ ।

जस्तै मेट्रिक्स P = $\begin{bmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 8 \\ 3 & 8 & 1 \end{bmatrix}$ मा लहरलाई पङ्क्तिमा परिवर्तन गर्दा बन्ने नयाँ

मेट्रिक्स Q = $\begin{bmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 8 \\ 3 & 8 & 1 \end{bmatrix}$ हुन्छ । यहाँ P = Q हुन्छ ।

त्यसैले एउटा वर्गाकार मेट्रिक्समा लहर (column) लाई पङ्क्ति (row) मा र पङ्क्ति (row) लाई लहर (column) मा परिर्वतन गर्दा मेट्रिक्समा कुनै परिर्वतन नभएमा त्यस्तो मेट्रिक्सलाई सममिति मेट्रिक्स (symmetric matrix) भनिन्छ ।

(k) बराबर मेट्रिक्स (Equal Matrix)

तलका मेट्रिक्सहरू अध्ययन गरी छलफल गर्नुहोस् :

A = $\begin{bmatrix} 25 & 30 & 30 \\ 40 & 45 & 50 \end{bmatrix}$ र B = $\begin{bmatrix} 25 & 30 & 30 \\ 40 & 45 & 50 \end{bmatrix}$

मेट्रिक्स A र B का सदस्य सङ्ख्या कति कति छन् ? के मेट्रिक्स A र B का सङ्गत सदस्यहरू समान (बराबर) छन् ? त्यसैगरी M = $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ र N = $\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 4 & -6 \end{bmatrix}$ मा मेट्रिक्स M र N का सङ्गत सदस्यहरू अथवा a = -2, b = 0, c = 4 र d = -6 छन् भने मेट्रिक्स M = N हुन्छ । यसरी समान क्रमका दुई मेट्रिक्सका सम्बन्धित सदस्यहरू पनि बराबर छन् भने त्यस्तो मेट्रिक्सलाई बराबर मेट्रिक्स भनिन्छ ।

तलका मेट्रिक्सहरू अध्ययन गरी निम्न प्रश्नहरूमा छलफल गर्नुहोस् :

A = $\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 9 & 7 \end{bmatrix}$, B = $\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 9 & 7 \end{bmatrix}$, C = $\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 7 & 9 \end{bmatrix}$

(i) के मेट्रिक्स A, B र C का क्रमहरू बराबर छन् ?

(ii) प्रत्येक मेट्रिक्सका सङ्गत सदस्यहरू पत्ता लगाउनुहोस् र कुन कुन मेट्रिक्समा सङ्गत सदस्यहरू बराबर छन् ? छलफल गर्नुहोस् ।

माथि दिइएका मेट्रिक्सहरूमध्ये A र B का क्रम र सङ्गत सदस्य बराबर छन् । यस्तो अवस्थामा मेट्रिक्सहरू A र B लाई बराबर भनिन्छ र A = B लेखिन्छ । के मेट्रिक्सहरू A र B बराबर छन्, किन ? तर C का सङ्गत सदस्यहरू A र B का सङ्गत सदस्यहरूसँग बराबर छैनन् । त्यसैले A ≠ C हुन्छ ।

उदाहरण 1

यदि $\begin{bmatrix} x+y & 7 \\ 5 & x-y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 7 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$ भए x र y को मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान

यहाँ, दुवै मेट्रिक्सहरू बराबर भएकाले यिनीहरूका सङ्गत सदस्यहरू पनि बराबर हुन्छन् ।

अतः x + y = 6 .... (i)

x - y = 2 .... (ii)

समीकरण (i) र (ii) लाई हल गर्दा,

x = 4 र y = 2 हुन्छ ।

उदाहरण 2

मेट्रिक्स A = $[a_{ij}]_{2x3}$ र $a_{ij} = (i \times j)^2$ छ भने मेट्रिक्स A बनाउनुहोस् ।

समाधान

यहाँ, A = $[a_{ij}]_{2x3} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}_{2\times3}$

अब, $a_{ij} = (i \times j)^2$

$a_{11} = (1 \times 1)^2 = (1)^2 = 1$

$a_{12} = (1 \times 2)^2 = (2)^2 = 4$

$a_{13} = (1 \times 3)^2 = (3)^2 = 9$

$a_{21} = (2 \times 1)^2 = (2)^2 = 4$

$a_{22} = (2 \times 2)^2 = (4)^2 = 16$

$a_{23} = (2 \times 3)^2 = (6)^2 = 36$

$\therefore \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}_{2\times3}$

$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 9 \\ 4 & 16 & 36 \end{bmatrix}_{2\times3}$

उदाहरण 3

यदि $\begin{bmatrix} x-1 & 2q-4 \\ 3p-6 & y+2 \end{bmatrix}$ एउटा एकात्मक मेट्रिक्स भए x, y, p र q को मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान

यहाँ, दिएको मेट्रिक्स एकात्मक भएकाले

$$\begin{bmatrix} x-1 & 2q-4 \\ 3p-6 & y+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

सङ्गत सदस्यहरू बराबर गर्दा,

अतः $x - 1 = 1$ र $2q - 4 = 0$

अथवा $x = 2$ अथवा, $2q = 4$ अथवा, $q = 2$

पुनः $3p - 6 = 0$ र $y + 2 = 1$

अथवा, $3p = 6$ अथवा, $y = 1 - 2 = -1$

अथवा, $p = 2$ $\therefore y = -1$

$\therefore$ $x = 2$, $y = -1$, $p = 2$ र $q = 2$ हुन्छ ।

अभ्यास 3.2

1. उदारहणसहित तलका मेट्रिक्सहरूको परिचय दिनुहोस् :
   (a) वर्गाकार मेट्रिक्स (b) विकर्ण मेट्रिक्स
   (c) स्केलर मेट्रिक्स (d) सममिति मेट्रिक्स

2. तल दिइएका मेट्रिक्सका प्रकार लेख्नुहोस् :
   (a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ (b) = $\begin{bmatrix} 11 \\ 13 \\ 17 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$

   (d) $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{bmatrix}$ (e) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

3.(a) यदि मेट्रिक्स $M = [a_{ij}]$ र $a_{ij} = 2i + j$ भए, एउटा $M_{2\times2}$ वर्गाकार मेट्रिक्स बनाउनुहोस् ।

(b) यदि मेट्रिक्स $N = [a_{ij}]$ र $a_{ij} = i - j$ भए एउटा $N_{2\times3}$ आयतकार मेट्रिक्स बनाउनुहोस् ।

(c) मेट्रिक्स $A = [a_{ij}]$ छ, जहाँ $a_{ij} = (i \times j)^3$ हुने एउटा 3×3 मेट्रिक्स बनाउनुहोस् ।

4.(a) यदि $A = \begin{bmatrix} x-1 & 3 \\ 5 & y \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -3 & x+z \\ w-y & 2 \end{bmatrix}$ र A= B भए, w, x, y र z को मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

(b) यदि $\begin{bmatrix} x-6 & 4y-8 \\ 5p-10 & q+2 \end{bmatrix}$ एउटा एकात्मक मेट्रिक्स भए x, y, p र q को मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

(c) तल दिइएको अवस्थामा p र q को मान पत्ता लगाउनुहोस् :

$$\begin{bmatrix} p+q \\ p-q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

3.3 मेट्रिक्सका क्रियाहरू (Operations of matrix)

मेट्रिक्सका क्रियाहरूअन्तर्गत हामी मेट्रिक्सहरूका जोड, घटाउ र गुणनका बारेमा छलफल गर्ने छौँ ।

(क) मेट्रिक्सहरूको जोड (Addition of Matrices)

कुनै दुई ओटा पसलहरूमा गत हप्ता आइतबारदेखि मङ्गलबारसम्म बिक्री भएका आलु, गोलभेँडा र काउली‌का परिमाणहरू (kg) तल तालिकामा उल्लेख गरेबमोजिम छन् :

तरकारी बिक्रीको परिमाण

पहिलो पसल

परिमाण / बार	आलु (kg)	गोलभेँडा (kg)	काउली (kg)
आइतबार	5	7	3
सोमबार	4	6	5
मङ्गलबार	7	3	10

दोस्रो पसल

परिमाण / बार	आलु (kg)	गोलभेँडा (kg)	काउली (kg)
आइतबार	3	4	6
सोमबार	5	7	10
मङ्गलबार	8	5	11

माथिका दुई ओटा तालिका अध्ययन गरी निम्न प्रश्नहरूमा छलफल गर्नुहोस् :

(a) आइतबार दुई ओटा पसलमा गरी जम्मा कति के.जी (kg) आलु बिक्री भयो होला ?

(b) मङ्गलबार दुई ओटा पसलमा गरी जम्मा कति के.जी. (kg) काउली बिक्री भयो होला ?

(c) आइतबारदेखि मङ्गलबारसम्म दुई ओटै पसलमा गरी प्रत्येक तरकारीहरू कति कति के.जी. बिक्री भयो ?

उपर्युक्त छलफलका आधारमा पहिलो पसल र दोस्रो पसलका प्रत्येक तरकारीको बिक्री परिमाणलाई मेट्रिक्सद्वारा निम्नानुसार राख्न सकिन्छ :

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 7 & 3 \\ 4 & 6 & 5 \\ 7 & 3 & 10 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 6 \\ 5 & 7 & 10 \\ 8 & 5 & 11 \end{bmatrix}$$

अब मेट्रिक्स जोडको स्वरूपअनुसार मेट्रिक्स A र B लाई आपसमा जोड्दा

$$A + B = \begin{bmatrix} 5 & 7 & 3 \\ 4 & 6 & 5 \\ 7 & 3 & 10 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 4 & 6 \\ 5 & 7 & 10 \\ 8 & 5 & 11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5+3 & 7+4 & 3+6 \\ 4+5 & 6+7 & 5+10 \\ 7+8 & 3+5 & 10+11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 11 & 9 \\ 9 & 13 & 15 \\ 15 & 8 & 21 \end{bmatrix}$$

माथिका क्रियाकलापका आधारमा मेट्रिक्सहरूका जोड क्रिया कसरी गर्न सकिन्छ भन्ने कुरा सजिलै बुझ्न सकिन्छ ।

दुई ओटा मेट्रिक्स जोड्दा समान स्थानमा रहेका दुई ओटा सदस्यहरूलाई जोड्दै जानुपर्दछ अर्थात् सम्बन्धित सदस्यहरूलाई क्रमशः जोडिन्छ । तसर्थ, समान क्रमका मेट्रिक्सहरू मात्र जोड्न सकिन्छ र यसरी जोड्दा सङ्गत सदस्यहरूलाई मात्र जोड्नुपर्छ ।

उदाहरण 1

यदि $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ र $B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$ भए A + B को मान निकाल्नुहोस् :

समाधान

जहाँ, $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ र $B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$ छन् भने,

मेट्रिक्स जोडको परिभाषा अनुसार,

$$A + B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \end{bmatrix}$$

उदाहरण 2

यदि $M = \begin{bmatrix} 3 & 7 & 9 \\ 11 & 13 & 15 \end{bmatrix}$ र $N = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 8 & 10 & 12 \end{bmatrix}$ भए M + N को मान पत्ता लगाउनुहोस् :

समाधान

यहाँ, $M = \begin{bmatrix} 3 & 7 & 9 \\ 11 & 13 & 15 \end{bmatrix}$ र $N = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 8 & 10 & 12 \end{bmatrix}$ छन् ।

अब, $M + N = \begin{bmatrix} 3 & 7 & 9 \\ 11 & 13 & 15 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 8 & 10 & 12 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 3+2 & 7+4 & 9+6 \\ 11+8 & 13+10 & 15+12 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5 & 11 & 15 \\ 19 & 23 & 27 \end{bmatrix}$$

(ख) **मेट्रिक्सहरूको घटाउ (Subtraction of Matrices)**

माथिको (क) अनुसार पहिलो र दोस्रो पसलमध्ये कुन पसलमा कुन बार कुन किसिमको तरकारी कति बढी बिक्री भएको छ भन्ने कुरा सजिलै कसरी पत्ता लगाउन सकिएला ? छलफल गर्नुहोस् ।

यहाँ दुई ओटा मेट्रिक्सहरूको जोड गरे जस्तै मेट्रिक्सको घटाउ गरेमा उपर्युक्त समस्याहरू हल गर्न सकिन्छ ।

मानौँ A = $=\begin{bmatrix}5 & 7 & 3\\4 & 6 & 5\\7 & 3 & 10\end{bmatrix}$ र B = $\begin{bmatrix}3 & 4 & 1\\3 & 4 & 2\\5 & 1 & 8\end{bmatrix}$ भए,

$$A - B = \begin{bmatrix}5 & 7 & 3\\4 & 6 & 5\\7 & 3 & 10\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}3 & 4 & 1\\3 & 4 & 2\\5 & 1 & 8\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}5-3 & 7-4 & 3-1\\4-3 & 6-4 & 5-2\\7-5 & 3-1 & 10-8\end{bmatrix} \quad = \begin{bmatrix}2 & 3 & 2\\1 & 2 & 3\\2 & 2 & 2\end{bmatrix}$$

यसरी मेट्रिक्सको जोड गरे जस्तै घटाउमा पनि समान क्रमका मेट्रिक्सहरू मात्र घटाउन सकिन्छ र घटाउँदा सम्बन्धित सदस्यहरू क्रमशः घटाइन्छ ।

उदाहरण 3

यदि M = $\begin{bmatrix}3 & 7 & 9\\4 & 3 & 2\\10 & 9 & 8\end{bmatrix}$ र N = $\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\4 & 5 & 6\\7 & 8 & 9\end{bmatrix}$ भए M - N को मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान

यहाँ M = $\begin{bmatrix}3 & 7 & 9\\4 & 3 & 2\\10 & 9 & 8\end{bmatrix}$ र N = $\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\4 & 5 & 6\\7 & 8 & 9\end{bmatrix}$ छन् ।

अब $M - N = \begin{bmatrix}3 & 7 & 9\\4 & 3 & 2\\10 & 9 & 8\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\4 & 5 & 6\\7 & 8 & 9\end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix}3-1 & 7-2 & 9-3\\4-4 & 3-5 & 2-6\\10-7 & 9-8 & 8-9\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2 & 5 & 6\\0 & -2 & -4\\3 & 1 & -1\end{bmatrix}$$

$$\therefore M - N = \begin{bmatrix}2 & 5 & 6\\0 & -2 & -4\\3 & 1 & -1\end{bmatrix}$$

उदाहरण 4

यदि $A = \begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}$ र $B = \begin{bmatrix}b_{11} & b_{12}\\b_{21} & b_{22}\end{bmatrix}$ र $\begin{bmatrix}c_{11} & c_{12}\\c_{21} & c_{22}\end{bmatrix}$ भए A + B - C को मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान

यहाँ, $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$, $B= \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$ र $C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}$ छन् ।

अतः$A + B - C = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11}-c_{11} & a_{12}+b_{12}-c_{12} \\ a_{21}+b_{21}-c_{21} & a_{22}+b_{22}-c_{22} \end{bmatrix}$

(ग) **मेट्रिक्स जोडका गुणहरू (Properties of Matrix Addition)**

(i) बन्दी गुण (Closure Property)

तलका मेट्रिक्सहरू अध्ययन गरी छलफल गर्नुहोस् :

$P = \begin{bmatrix} 11 & 13 \\ 17 & 19 \end{bmatrix}$ र $Q = \begin{bmatrix} 8 & 10 \\ 12 & 14 \end{bmatrix}$

(a) P + Q कस्तो मेट्रिक्स बन्ला ?

(b) P + Q, P र Q को क्रमहरू कति कति हुन्छ ?

यहाँ, $P = \begin{bmatrix} 11 & 13 \\ 17 & 19 \end{bmatrix}$ र $Q = \begin{bmatrix} 8 & 10 \\ 12 & 14 \end{bmatrix}$

अब, $P + Q = \begin{bmatrix} 11 & 13 \\ 17 & 19 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 8 & 10 \\ 12 & 14 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 11+8 & 13+10 \\ 17+12 & 19+14 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 19 & 23 \\ 29 & 33 \end{bmatrix}$

अतः मेट्रिक्स P र Q दुवै 2 x 2 क्रमका मेट्रिक्स छन् र P + Q पनि 2×2 क्रमकै मेट्रिक्स हुन्छ ।

तसर्थ, दुई ओटा समान क्रमका मेट्रिक्सहरूको योगफल पनि उही क्रमको मेट्रिक्स हुन्छ । जोडको यो गुणलाई बन्दी गुण (closure propety) भनिन्छ ।

(ii) क्रम विनियम गुण (Commutative Property)

यदि $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$ र $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$ भए $A + B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 2+1 & 4+3 \\ 6+5 & 8+7 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 11 & 15 \end{pmatrix}$

पुनः $B + A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 1+2 & 3+4 \\ 5+6 & 7+8 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 11 & 15 \end{pmatrix}$

यहाँ A + B = B + A हुन्छ ।

अतः मेट्रिक्सहरूको जोडमा क्रम विनिमय गुण हुन्छ ।

(iii) सङ्घीय गुण (Associative property)

मानौं A = $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$ र $C = \begin{bmatrix} 11 & 12 \\ 13 & 14 \end{bmatrix}$

अब, A + B = $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 1+5 & 2+6 \\ 3+7 & 4+8 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 10 & 12 \end{bmatrix}$

अब, (A +B) + C $= \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 10 & 12 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 11 & 12 \\ 13 & 14 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 6+11 & 8+12 \\ 10+13 & 12+14 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 17 & 20 \\ 23 & 26 \end{bmatrix}$

पुनः B + C

$= \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 11 & 12 \\ 13 & 14 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 16 & 18 \\ 20 & 22 \end{bmatrix}$

अब, A +(B+ C) = $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 16 & 18 \\ 20 & 22 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 1+16 & 2+18 \\ 3+20 & 4+22 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 17 & 20 \\ 23 & 26 \end{bmatrix}$

$\therefore$ (A + B)+ C = A + (B + C)

अतः मेट्रिक्सहरूको जोडमा सङ्घीय गुण हुन्छ ।

(iv) एकात्मक गुण (Identity property)

मानौं A = $\begin{bmatrix} 12 & 14 & 16 \\ 9 & 12 & 15 \end{bmatrix}$ र Z = $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

अब, A + Z = $\begin{bmatrix} 12 & 14 & 16 \\ 9 & 12 & 15 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 12+0 & 14+0 & 16+0 \\ 9+0 & 12+0 & 15+0 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 12 & 14 & 16 \\ 9 & 12 & 15 \end{bmatrix}$ - - - (1)

पुनः Z + A = $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 12 & 14 & 16 \\ 9 & 12 & 15 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 12 & 14 & 16 \\ 9 & 12 & 15 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 0+12 & 0+14 & 0+16 \\ 0+9 & 0+12 & 0+15 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 12 & 14 & 16 \\ 9 & 12 & 15 \end{bmatrix}$ - - - (ii)

यहाँ समीकरण (i) र (ii) बाट

A + Z = Z + A = A

यहाँ Z एउटा शून्य मेट्रिक्स हो । शून्य मेट्रिक्समा समान क्रमको कुनै अर्को मेट्रिक्स जोड्दा पुनः त्यही मेट्रिक्स प्राप्त हुन्छ, यसलाई मेट्रिक्स जोडको एकात्मक गुण (identity property) भनिन्छ ।

(v) जोडको विपरीत नियम (Law of additive inverse]

मानौँ, A = $\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 9 & 16 \end{bmatrix}$ र B = $\begin{bmatrix} -1 & -4 \\ -9 & -16 \end{bmatrix}$

अब, A + B= $\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 9 & 16 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & -4 \\ -9 & -16 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 1-1 & 4-14 \\ 9-9 & 16-16 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

पुनः B + A = $\begin{bmatrix} -1 & -4 \\ -9 & -16 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 9 & 16 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} -1+1 & -4+4 \\ -9+9 & -16+16 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

$\therefore$ A + B = 0 = B + A

अतः B लाई A को विपरीत मेट्रिक्स भनिन्छ ।

B = -A हुँदा A + (-A) = 0 हुन्छ ।

उदाहरण 5

यदि A = $\begin{pmatrix} 8 & -6 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ र A + B = O भए B को मान पत्ता लगाउनुहोस् । जहाँ O, 2 x 2 को शून्य मेट्रिक्स हो ।

समाधान

यहाँ, A = $\begin{pmatrix} 8 & -6 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ र A + B = $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

मानौँ, B = $\begin{pmatrix} c & d \\ e & f \end{pmatrix}$

अब, A +B = O

अथवा, $\begin{pmatrix} 8 & -6 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c & d \\ e & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

अथवा, $\begin{pmatrix} 8+c & -6+d \\ 3+e & 0+f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

दुवै मेट्रिक्सहरू बराबर भएकाले यिनीहरूका सङ्गत सदस्यहरू पनि बराबर हुन्छन् ।

अतः $8 + c = 0 \Rightarrow c = -8$

$-6 + d = 0 \Rightarrow d = 6$

$3 + e = 0 \Rightarrow e = -3$

$0 + f = 0 \Rightarrow f = 0$

$\therefore$ c = -8, d =6, e = -3 र f = 0

अतः B = $\begin{pmatrix} -8 & 6 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$ हुन्छ । यहाँ, A र B लाई एकअर्काको जोडको विपरीत मेट्रिक्स भनिन्छ ।

अभ्यास 3.3

1. (a) मेट्रिक्सको जोड र घटाउका पूर्व सर्तहरू के के हुन् ? लेख्नुहोस् ।

   (b) मेट्रिक्स जोडका गुणहरू के के हुन्, लेख्नुहोस् ।

2. (a) तल दिएका कुन कुन मेट्रिक्सहरूको जोड र घटाउ गर्न सकिन्छ ? कारणसहित लेख्नुहोस् ।

   M = $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ N = $\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 7 & 9 \end{bmatrix}$

   P = $\begin{bmatrix} 11 \\ 13 \\ 14 \end{bmatrix}$ Q = $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$

R = $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$, S = $[7 \quad 8 \quad 9]$, T = $\begin{bmatrix} e & f & g \\ h & i & j \end{bmatrix}$

(b) माथिका मेट्रिक्सका आधारमा तलका मान पत्ता लगाउनुहोस् :

(i) Q + R (ii) M – N (iii) T + Q - R

3. (a) उदाहरणसहित मेट्रिक्स जोडका निम्न लिखित गुणहरू परीक्षण गर्नुहोस् :

(i) क्रम विनिमय गुण (ii) बन्दी गुण

(iii) सङ्घीय गुण (iv) एकात्मक गुण

(b) यदि A = $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ भए मेट्रिक्स A को जोडको विपरीत मेट्रिक्स पत्ता लगाउनुहोस् ।

4. (a) यदि $\begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & y \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 7 \\ 7 & 3 \end{bmatrix}$ भए, x र y को मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

(b) यदि $\begin{bmatrix} 9 & x \\ 10 & 7 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 7 & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ भए, x र y को मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

(c) यदि $\begin{bmatrix} 3x - 2 & 5y + 4 \\ 2 & 4 + 2z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + 2 & y - 4 \\ 2 & z - 2 \end{bmatrix}$ भए, x, y र z का मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

(d) यदि $\begin{pmatrix} x - 1 & -4 \\ y + 3 & 5 \end{pmatrix}$ को जोडको विपरीत मेट्रिक्स $\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -4 & -5 \end{pmatrix}$ भए x र y को मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

5. (a) यदि A = $[4 \quad 5 \quad 6]$, B = $[-3 \quad 7 \quad 2]$ र C = $[8 \quad 9 \quad -4]$ भए तलका अवस्थामा मेट्रिक्स X पत्ता लगाउनुहोस् :

(i) X = A + B + C (ii) A – X = B + C (iii) X – C = B

(b) यदिA = $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, B = $\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ र C = $\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}$ भए, निम्न लिखित अवस्थामा मेट्रिक्स Y को मान पत्ता लगाउनुहोस् :

(i) Y = A + B - C (ii) Y – A = B (iii) A + Y = B + C

6. 5/5 जनाको समूह बनाई नजिकैका दुई ओटा स्टेसनरी पसलमा जानुहोस् । एकै किसिमको कुनै 5 ओटा स्टेसनरी सामग्रीहरूको मौज्दात सङ्ख्यालाई मेट्रिक्सका रूपमा लेखी दुवै स्टेसनरी पसलका सो सामग्रीहरूको जम्मा मौज्दात सङ्ख्या र सोही दिन बिक्रीपछि बाँकी रहेका सामग्रीहरूको सङ्ख्या पत्ता लगाउन प्रयोग हुने मेट्रिक्सका क्रियाहरू लेख्नुहोस् ।

3.4. मेट्रिक्सको क्रम परिवर्तन (Transpose of Matrix)

कुनै मेट्रिक्स A = $\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}$ भए, यसका लहर (column) लाई पङ्क्ति (row) मा परिर्वतन गर्दा कस्तो मेट्रिक्स बन्छ ? छलफल गर्नुहोस् । नयाँ बन्ने मेट्रिक्स र पुरानो मेट्रिक्स बिच के के समानता र भिन्नता हुन्छ ? छलफल गरी माथिको मेट्रिक्स A को लहरलाई पङ्क्तिमा परिवर्तन गर्दा नयाँ बन्ने मेट्रिक्स B = $\begin{bmatrix} a & d \\ b & e \\ c & f \end{bmatrix}$ बन्छ । यसरी कुनै मेट्रिक्सका पङ्क्तिलाई लहर र लहरलाई पङ्क्तिमा परिर्वतन गर्दा प्राप्त हुने मेट्रिक्सलाई दिइएको मेट्रिक्सको क्रम परिवर्तन मेट्रिक्स (transpose matrix) भनिन्छ । यहाँ मेट्रिक्स B लाई A को क्रम परिवर्तन मेट्रिक्स भनिन्छ । कुनै मेट्रिक्स A को क्रम परिवर्तन मेट्रिक्सलाई A' अथवा A^T ले जनाइन्छ । यहाँ, A' =A^T = B हुन्छ ।

उदाहरण 1

यदि A = $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 1 & 7 & 9 \end{bmatrix}$ भए, A^T को मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान

यहाँ, A =$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 1 & 7 & 9 \end{bmatrix}_{2\times3}$

लहर र पङ्क्तिलाई एकआपसमा परिवर्तन गर्दा (साट्दा,) A^T = $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 7 \\ 5 & 9 \end{bmatrix}_{3\times2}$ हुन्छ ।

मेट्रिक्सको क्रम परिवर्तनका गुणहरू

(a) मानौँ, A = $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ छ, भने

A^T = $\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$ हुन्छ ।

फेरि, मेट्रिक्स A^T लाई क्रम परिवर्तन गर्दा $(A^T)^T$ = $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

अतः $(A^T)^T$ = A हुन्छ ।

(b) मानौँ, M = $\begin{bmatrix} 1 & 12 \\ 14 & 3 \end{bmatrix}$

N = $\begin{bmatrix} 4 & 9 \\ 15 & 21 \end{bmatrix}$

अब, M^T = $\begin{bmatrix} 1 & 14 \\ 12 & 3 \end{bmatrix}$ र N^T = $\begin{bmatrix} 4 & 15 \\ 9 & 21 \end{bmatrix}$

अब, M + N = $\begin{bmatrix} 1 & 12 \\ 14 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 9 \\ 15 & 21 \end{bmatrix}$

= $\begin{bmatrix} 1+4 & 12+9 \\ 14+15 & 3+21 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 5 & 21 \\ 29 & 24 \end{bmatrix}$

$(M + N)^T = \begin{bmatrix} 5 & 29 \\ 21 & 24 \end{bmatrix}$

र $(M^T + N^T) = \begin{bmatrix} 1 & 14 \\ 12 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 15 \\ 9 & 21 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 1+4 & 14+15 \\ 12+9 & 3+21 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 5 & 29 \\ 21 & 24 \end{bmatrix}$

अतः $(M + N)^T = M^T + N^T$ हुन्छ ।

(c) मानौँ, $P = \begin{bmatrix} 40 & 42 \\ 41 & 43 \end{bmatrix}$ र k कुनै अचर राशि हो भने,

$kP = k \begin{bmatrix} 40 & 42 \\ 41 & 43 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 40k & 42k \\ 41k & 43k \end{bmatrix}$

$(kP)^T = \begin{bmatrix} 40k & 41k \\ 42k & 43k \end{bmatrix}$

अब, $P^T = \begin{bmatrix} 40 & 41 \\ 42 & 43 \end{bmatrix}$

P^T लाई स्केलर k ले गुणन गर्दा

$kP^T = k \begin{bmatrix} 40 & 41 \\ 42 & 43 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 40k & 41k \\ 42k & 43k \end{bmatrix}$

अतः $(kP)^T = kP^T$

अभ्यास 3.4

1. (a) मेट्रिक्सको क्रम परिवर्तन भनेको के हो ? उदाहरणसहित लेख्नुहोस् ।
   (b) मेट्रिक्सको क्रम परिवर्तनका गुणहरू लेख्नुहोस् ।

2. (a) दिइएको मेट्रिक्सको क्रम परिवर्तन गर्नुहोस् : $A = [p \quad q \quad r], B = \begin{bmatrix} m \\ n \\ 0 \end{bmatrix}$

   $C = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 2 & 7 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 3 & 9 & 12 \\ 18 & 21 & 27 \end{bmatrix}, E = \begin{bmatrix} x & p & a \\ y & q & b \\ z & r & c \end{bmatrix}$

3. यदि $M = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$ र $N = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 9 \end{bmatrix}$ भए, प्रमाणित गर्नुहोस् ।

(a) $(M^T)^T = M$ (b) $(M + N)^T = M^T + N^T$

4. यदि $Q = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ भए, $Q + Q^T$ एउटा सममिति मेट्रिक्स हुन्छ भनी प्रमाणित गर्नुहोस् ।

3.5 मेट्रिक्सको गुणन (Multiplication of Matrix)

(क) अचर राशि र मेट्रिक्सको गुणन (Multiplication of matrix by a scalar)

कुनै मेट्रिक्स $A = \begin{bmatrix} x & y \\ p & q \end{bmatrix}$ भए $A + A = \begin{bmatrix} x & y \\ p & q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x & y \\ p & q \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} x + x & y + y \\ p + p & q + q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x & 2y \\ 2p & 2q \end{bmatrix}$$

यहाँ, $A + A = 2A$

अतः $A + A = 2A = \begin{bmatrix} 2x & 2y \\ 2p & 2q \end{bmatrix}$

यसैगरी, 3A, 4A को मान कति कति होला ? छलफल गर्नुहोस् ।

यसरी कुनै अचर राशि (Scalar) ले मेट्रिक्सलाई गुणन गर्दा मेट्रिक्सको प्रत्येक सदस्यलाई सो अचरले गुणन गर्नुपर्छ । यसलाई मेट्रिक्सको स्केलर गुणन पनि भनिन्छ ।

उदाहरण 1

यदि $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 11 \\ 3 & 7 & 13 \end{pmatrix}$ भए, 3A र kA को मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान

यहाँ $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 11 \\ 3 & 7 & 13 \end{pmatrix}$ छ,

अतः $3A = 3\begin{pmatrix} 2 & 5 & 11 \\ 3 & 7 & 13 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 3 \times 2 & 3 \times 5 & 3 \times 11 \\ 3 \times 3 & 3 \times 7 & 3 \times 13 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 6 & 15 & 33 \\ 9 & 21 & 39 \end{pmatrix}$$

फेरि, k एउटा अचर राशि भए

$kA = k\begin{pmatrix} 2 & 5 & 11 \\ 3 & 7 & 13 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 2k & 5k & 11k \\ 3k & 7k & 13k \end{pmatrix}$$

उदाहरण 2

यदि M = $\begin{pmatrix} 9 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$, $N = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 7 & -11 \end{pmatrix}$ र P एउटा 2×2 को मेट्रिक्स भए, 3M +5N -2P = O भएको अवस्थामा P को मान कति हुन्छ ? जहाँ O एउटा 2 x 2 शून्य मेट्रिक्स हो ।

समाधान

यहाँ M = $\begin{pmatrix} 9 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$, $N = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 7 & -11 \end{pmatrix}$ र O = $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ छन् ।

अब, 3M +5N – 2P =0

अथवा, $3\begin{pmatrix} 9 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} + 5\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 7 & -11 \end{pmatrix} - 2P = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

अथवा, $\begin{pmatrix} 27 & 3 \\ 15 & 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 25 \\ 35 & -55 \end{pmatrix} - 2P = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

अथवा, $\begin{pmatrix} 27+5 & 3+25 \\ 15+35 & 9+(-55) \end{pmatrix} - 2P = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

अथवा, $\begin{pmatrix} 32 & 28 \\ 50 & -46 \end{pmatrix} - 2P = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

अथवा, $2P = \begin{pmatrix} 32 & 28 \\ 50 & -46 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

अथवा, $2P = \begin{pmatrix} 32 & 28 \\ 50 & -46 \end{pmatrix}$

अथवा, $P = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 32 & 28 \\ 50 & -46 \end{pmatrix}$

$$P = \begin{pmatrix} 32 \times \frac{1}{2} & 28 \times \frac{1}{2} \\ 50 \times \frac{1}{2} & -46 \times \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

अतः $P = \begin{pmatrix} 16 & 14 \\ 25 & -23 \end{pmatrix}$

(ख) **मेट्रिक्सहरूको गुणन (Multiplication of Matrices)**

डोल्माले 25km/hr को गतिमा 3 घण्टा, 30km/hr को गतिमा 2 घण्टा र 40km/hr को गतिमा 2.5 घण्टासम्म यात्रा गरेपछि आफ्नो घरबाट राष्ट्रिय निकुञ्ज पुगिन् । उनले जम्मा कति दुरी पार गरिन् होला ? कसरी पत्ता लगाउन सकिन्छ ? अलग अलग गतिमा पार गरेको दुरी कति कति होला ? छलफल गर्नुहोस् ।

उपर्युक्त जानकारीबाट विभिन्न समयको गतिलाई मेट्रिक्सका रूपमा निम्नानुसार प्रस्तुत गर्न सकिन्छ :

$V = [25 \quad 30 \quad 40]$

पुनः फरक फरक गतिको समयावधिलाई पनि मेट्रिक्सका रूपमा निम्नानुसार प्रस्तुत गर्न सकिन्छ :

$$T = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 2.5 \end{bmatrix}$$

यहाँ, डोल्माले घरदेखि निकुञ्जसम्म पार गरेको दुरी पत्ता लगाउन अलग अलग गति र समयमा पार गरेको दुरीको गुणनको योगफलबाट यसरी पत्ता लगाउन सकिन्छ :

जम्मा पार गरेको दुरी $= 25 \times 3 + 30 \times 2 + 40 \times 2.5$

$= 75 + 60 + 100$

$= 235\text{km}$

अब, यस गुणन प्रक्रियालाई मेट्रिक्सका रूपमा लेख्दा

पार गरेको दुरी (D) = VT

$$= \begin{bmatrix} 25 & 30 & 40 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 2.5 \end{bmatrix}$$

$$= [25 \times 3 + 30 \times 2 + 40 \times 2.5]$$

$$= [75 + 60 + 100]$$

$$= [235]$$

अब, यहाँ मेट्रिक्स V, T र D को क्रम कति कति छ ? यिनीहरूबिच के सम्बन्ध छ ? के जुनसुकै क्रममा रहेका मेट्रिक्सहरूको गुणन सम्भव हुन्छ ? छलफल गर्नुहोस् । पुनः एउटा अर्को उदाहरण अध्ययन गरौँ । एउटा हाउजिङ कम्पनीले A, B र C तिन मोडेलका घरहरू निर्माण गर्छ । उक्त तिन फरक मोडेलका घरमा प्रयोग भएको ढोका र झ्यालको सङ्ख्या निम्नानुसार छ :

घरको मोडेल	**A**	**B**	**C**
झ्याल	10	15	25
ढोका	4	6	10

यदि उक्त कम्पनीको फागुन र चैत महिनामा घर निर्माणको लक्ष्य निम्नानुसार रहेछ भने,

घरको मोडेल	**फागुन**	**चैत**
A	4	2
B	3	3
C	2	5

प्रत्येक महिनाका लागि आवश्यक झ्याल र ढोकाको सङ्ख्या कति कति होला ? कसरी पत्ता लगाउन सकिन्छ ? छलफल गर्नुहोस् ।

उपर्युक्त जानकारीलाई मेट्रिक्सका रूपमा प्रस्तुत गर्दा

$H = \begin{bmatrix} 10 & 15 & 25 \\ 4 & 6 & 10 \end{bmatrix}$ $\qquad$ $G = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$

अब, उक्त निमार्ण कार्यका लागि प्रत्येक महिना आवश्यक पर्ने झ्याल ढोकाको सङ्ख्या निम्नानुसार पत्ता लगाउन सकिन्छ । फागुन महिनाका लागि आवश्यक झ्याल सङ्ख्या

$= 10 \times 4 + 15 \times 3 + 25 \times 2$

$= 40 + 45 + 50$

$= 135$

त्यसैगरी चैत महिनाका लागि आवश्यक झ्याल सङ्ख्या

$= 10 \times 2 + 15 \times 3 + 25 \times 5$

$= 20 + 45 + 125$

$= 190$

उपर्युक्त, फागुन महिनाका लागि आवश्यक ढोका सङ्ख्या

$= 4 \times 4 + 6 \times 3 + 10 \times 2$

$= 16 + 18 + 20$

$= 54$

त्यसैगरी चैत महिनाका लागि आवश्यक ढोका सङ्ख्या

$= 4 \times 2 + 6 \times 3 + 10 \times 5$

$= 8 + 18 + 50$

$= 76$

उपर्युक्त गणना प्रक्रियालाई मेट्रिक्सका रूपमा निम्नानुसार प्रस्तुत गर्न सकिन्छ :

$$D = HG = \begin{bmatrix} 10 & 15 & 25 \\ 4 & 6 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 10 \times 4 + 15 \times 3 + 25 \times 2 & 10 \times 2 + 15 \times 3 + 25 \times 5 \\ 4 \times 4 + 6 \times 3 + 10 \times 2 & 4 \times 2 + 6 \times 3 + 10 \times 5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 135 & 190 \\ 54 & 76 \end{bmatrix}$$

यहाँ मेट्रिक्स D को पहिलो पङ्क्तिले झ्यालको सङ्ख्या र दोस्रो पङ्क्तिले ढोकाको सङ्ख्या जनाउँछ । त्यसैगरी पहिलो लहरले फागुन महिना र दोस्रो लहरले चैत महिनाका लागि आवश्यक झ्याल तथा ढोकाको सङ्ख्या जनाउँछ ।

यस उदाहरणमा मेट्रिक्स H, G र D को क्रम कति कति छ ? यी मेट्रिक्सको क्रम बिचको सम्बन्ध के होला ? छलफल गर्नुहोस् ।

यसरी, कुनै दुई मेट्रिक्सहरूमा पहिलो मेट्रिक्सको लहरको सङ्ख्या र दोस्रो मेट्रिक्सको पङ्क्तिको सङ्ख्या बराबर भएमा मात्र ती दुई मेट्रिक्सहरूको गुणन सोही क्रममा गर्न सकिन्छ । मेट्रिक्सहरूको गुणन गर्दा पहिलो मेट्रिक्सको पङ्क्तिका सदस्यहरूलाई दोस्रो मेट्रिक्सको लहरको सम्बन्धित सदस्य (corresponding element) ले गुणन गरी गुणनफलहरू जोडिन्छ । यसरी प्राप्त मेट्रिक्सको क्रम पहिलो मेट्रिक्सको पङ्क्ति X दोस्रो मेट्रिक्सको लहर हुन्छ ।

अर्थात्,

$A_{m\times p} \times B_{p\times n} = C_{m\times n}$ हुन्छ ।

मेट्रिक्सहरूको गुणन प्रक्रियालाई निम्नानुसार प्रस्तुत गर्न सकिन्छ :

मानौँ, $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ र $B = \begin{bmatrix} w & x \\ y & z \end{bmatrix}$

अब, $AB = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} w & x \\ y & z \end{bmatrix}$

यो गुणनलाई चरणगत रूपमा निम्नानुसार गरिन्छ :

अब, चरण 1: $\begin{bmatrix} \boxed{a \quad b} \\ c \quad d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} w \\ y \end{matrix}} & \begin{matrix} x \\ z \end{matrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} aw + by & \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \end{bmatrix}$

चरण 2: $\begin{bmatrix} \boxed{a \quad b} \\ c \quad d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \begin{matrix} w \\ y \end{matrix} & \boxed{\begin{matrix} x \\ z \end{matrix}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} aw + by & ax + bz \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \end{bmatrix}$

चरण 3: $\begin{bmatrix} a \quad b \\ \boxed{c \quad d} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} w \\ y \end{matrix}} & \begin{matrix} x \\ z \end{matrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} aw + by & ax + bz \\ cw + dy & \dots\dots\dots \end{bmatrix}$

चरण 4: $\begin{bmatrix} a \quad b \\ \boxed{c \quad d} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \begin{matrix} w \\ y \end{matrix} & \boxed{\begin{matrix} x \\ z \end{matrix}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} aw + by & ax + bz \\ cw + dy & cx + dz \end{bmatrix}$

अब, $AB = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} w & x \\ y & z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} aw + by & ax + bz \\ cw + dy & cx + dz \end{bmatrix}$

उदाहरण 3

यदि $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}$ र $B = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 7 & 9 \end{bmatrix}$ भए AB र BA को मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान

यहाँ मेट्रिक्स A र B दुवैको क्रम 2×2 छ अतः AB र BA दुवै गुणन सम्भव छ ।

अब, $AB = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 7 & 9 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 2\times3 + 4\times7 & 2\times5 + 4\times9 \\ 6\times3 + 8\times7 & 6\times5 + 8\times9 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 6 + 28 & 10 + 36 \\ 18 + 56 & 30 + 72 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 34 & 46 \\ 74 & 102 \end{bmatrix}$

पुनः BA = $\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 7 & 9 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 3\times2+5\times6 & 3\times4+5\times8 \\ 7\times2+9\times6 & 7\times4+9\times8 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 36 & 52 \\ 68 & 100 \end{bmatrix}$

$\therefore$ AB ≠ BA

अतः मेट्रिक्सहरूको गुणनमा क्रम विनिमय नियम लागु हुँदैन ।

उदाहरण 4

यदि A = $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 4 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$ र B = $\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$ भए AB र BA पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान

यहाँ, मेट्रिक्स A को क्रम 3×2 र B को क्रम 2×2 छ । अतः AB का लागि A को लहर सङ्ख्या = B को पङ्क्ति सङ्ख्या हुन्छ । त्यसैले गुणन AB सम्भव छ । तर BA का लागि मेट्रिक्स B को लहर सङ्ख्या (2) ≠A को पङ्क्ति सङख्या (3) । त्यसैले गुणन BA सम्भव हुँदैन ।

अब, AB = $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 4 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 2\times1+0(-2) & 2\times5+0\times3 \\ (-3)\times1+4\times(-2) & (-3)\times5+4\times3 \\ 5\times1+(-2)\times(-2) & 5\times5+(-2)\times3 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 2+0 & 10+0 \\ -3-8 & -15+12 \\ 5+4 & 25-6 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 2 & 10 \\ -11 & -3 \\ 9 & 19 \end{bmatrix}$

उदाहरण 5

यदि, $\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 20 & 12 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$ भए मेट्रिक्स X पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान

यहाँ, मेट्रिक्स $\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$को क्रम 2×1 र मेट्रिक्स $\begin{bmatrix} 20 & 12 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$ को क्रम 2×2 भएकाले मेट्रिक्स X को क्रम 1×2 हुनुपर्छ ।

मानौँ, X = [a b]

अब, $\begin{bmatrix}4\\1\end{bmatrix}$ [a   b] = $\begin{bmatrix}20 & 12\\5 & 3\end{bmatrix}$

अथवा, $\begin{bmatrix}4\times a & 4\times \mathrm{b}\\1\times a & 1\times \mathrm{b}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}20 & 12\\5 & 3\end{bmatrix}$

अथवा, $\begin{bmatrix}4a & 4\mathrm{b}\\a & \mathrm{b}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}20 & 12\\5 & 3\end{bmatrix}$

उपर्युक्त मेट्रिक्सहरूका सङ्गत मानहरू बराबर गर्दा,

$4a = 20$

अथवा, $a = 5$

र 4b = 12

अथवा, b = 3

अतः आवश्यक मेट्रिक्स X = [5   3]

उदाहरण 6

यदि M = $\begin{pmatrix}1 & 2\\3 & 1\end{pmatrix}$ भए $M^2 - 2M - 5I = 0$ हुन्छ भनी प्रमाणित गर्नुहोस्, जहाँ I र O क्रमशः 2×2 क्रमका एकात्मक र शून्य मेट्रिक्स हुन् ।

समाधान

यहाँ, M = $\begin{pmatrix}1 & 2\\3 & 1\end{pmatrix}$, $I = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$ र 0 = $\begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}$

अब, $M^2 = \begin{pmatrix}1 & 2\\3 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\3 & 1\end{pmatrix}$

$= \begin{bmatrix}1\times 1+2\times 3 & 1\times 2+2\times 1\\3\times 1+1\times 3 & 3\times 2+1\times 1\end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix}1+6 & 2+2\\3+3 & 6+1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}7 & 4\\6 & 7\end{bmatrix}$

अतः $M^2 - 2M - 5I$

$= \begin{bmatrix}7 & 4\\6 & 7\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}2 & 4\\6 & 2\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}5 & 0\\0 & 5\end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix}7-2-5 & 4-4-0\\6-6-0 & 7-2-5\end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}$

$\therefore M^2 - 2M - 5I = 0$ प्रमाणित भयो ।

(ग) **मेट्रिक्सहरूको गुणनका गुणहरू (Properties of Matrix Multiplication)**

वास्तविक सङ्ख्याहरूको गुणनका गुणहरू के के हुन् ? छलफल गर्नुहोस् ।

सामान्यतया वास्तविक सङ्ख्याहरूको गुणनमा बन्दी गुण, क्रम विनिमय गुण, सङ्घीय गुण, वितरण गुण, एकात्मक गुण, व्युत्क्रम गुण, विपरीत गुणहरू विद्यमान हुन्छन् । के यी सबै गुणहरू मेट्रिक्सहरूको गुणनमा पनि विद्यमान हुन्छन् ? छलफल गर्नुहोस् ।

(i) **सङ्घीय गुण (Associative Property)**

मानौँ, A = $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ र$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{-1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{3} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$

अब, AB = $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

= $\begin{bmatrix} 1\times2+0\times1 & 1\times0+0\times1 \\ 1\times2+1\times1 & 1\times0+1\times1 \end{bmatrix}$

= $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$

(AB) C = $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$

= $\begin{bmatrix} 2\times(-1)+0\times3 & 2\times2+0\times0 \\ 3\times(-1)+1\times3 & 3\times2+1\times0 \end{bmatrix}$

= $\begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} \ldots\ldots\ldots\ldots..(\text{i})$

पुनः BC = $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$

= $\begin{bmatrix} 2\times(-1)+0\times3 & 2\times2+0\times0 \\ 1\times(-1)+1\times3 & 1\times2+1\times0 \end{bmatrix}$

= $\begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$

A(BC) =$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$

= $\begin{bmatrix} 1\times(-2)+0\times2 & 1\times4+0\times2 \\ 1\times(-2)+1\times2 & 1\times4+1\times2 \end{bmatrix}$

= $\begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} - - - (\text{ii})$

$\therefore$ (AB)C = A(BC)

अर्थात, मेट्रिक्सहरूको गुणन सङ्घीय हुन्छ ।

(ii) वितरणको गुण (Distributive Property)

मानौँ, A $= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ र $C = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$

अब, B + C $= \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 2-1 & 0+2 \\ 1+3 & 1+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$

र A (B + c) $= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 1\times 1 + 0\times 4 & 1\times 2 + 0\times 1 \\ 1\times 1 + 1\times 4 & 1\times 2 + 1\times 1 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} --- \text{(i)}$

पुन : AB $= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 1\times 2 + 0\times 1 & 1\times 0 + 0\times 1 \\ 1\times 2 + 1\times 1 & 1\times 0 + 1\times 1 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$

AC $= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 1\times(-1) + 0\times 3 & 1\times 2 + 0\times 0 \\ 1\times(-1) + 1\times 3 & 1\times 2 + 1\times 0 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$

र AB + AC $= \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 2+(-1) & 0+2 \\ 3+2 & 1+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$

$\therefore$ A(B+C) = AB + AC अर्थात्, मेट्रिक्सको जोड माथिको गुणन वितरणात्मक हुन्छ ।

त्यस्तै के (A +B) C = AC + BC हुन्छ ? छलफल गर्नुहोस् ।

(iii) एकात्मक गुण [Identity property]

मानौँ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$ एउटा वर्गाकार मेट्रिक्स हो र I समान क्रमको एकात्मक भेट्रिक्स हो ।

अत: $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

अब, AI = $\begin{bmatrix}1 & 2\\4 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix}1\times1+2\times0 & 1\times0+2\times1\\4\times1+(-3)\times0 & 4\times0+(-3)\times1\end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix}1 & 2\\4 & -3\end{bmatrix} = \mathrm{A}$

IA $= \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2\\4 & -3\end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix}1\times1+0\times4 & 1\times2+0\times(-3)\\0\times1+1\times4 & 0\times0+1\times(-3)\end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix}1 & 2\\4 & -3\end{bmatrix} = \mathrm{A}$

$\therefore$ AI = A = IA हुन्छ ।

अर्थात्, मेट्रिक्सको गुणनमा एकात्मक गुण हुन्छ ।

(iv) गुणनको क्रम परिवर्तनको गुण (Transpose of Product Property)

मानौँ, A = $\begin{bmatrix}3 & -2\\-1 & 4\end{bmatrix}$ र B = $\begin{bmatrix}-1 & 3\\4 & -2\end{bmatrix}$

अब, AB = $\begin{bmatrix}3 & -2\\-1 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 3\\4 & -2\end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix}3\times(-1)+(-2)\times4 & 3\times3+(-2)\times(-2)\\(-1)\times(-1)+4\times4 & (-1)\times3+4\times(-2)\end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix}-3-8 & 9+4\\1+16 & -3-8\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-11 & 13\\17 & -11\end{bmatrix}$

$\therefore$ $(AB)^T = \begin{bmatrix}-11 & 17\\13 & -11\end{bmatrix}$

त्यसपछि पुनः $A^T = \begin{bmatrix}3 & -1\\-2 & 4\end{bmatrix}$ र $B^T \begin{bmatrix}-1 & 4\\3 & -2\end{bmatrix}$

अब, $B^T A^T = \begin{bmatrix}-1 & 4\\3 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & -1\\-2 & 4\end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix}(-1)\times3+4\times(-2) & (-1)\times(-1)4\times4\\3\times3(-2)\times(-2) & 3\times(-1)+(-2)\times4\end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix}-3-8 & 1+16\\9+4 & -3-8\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-11 & 17\\13 & -11\end{bmatrix}$

$\therefore$ $(AB)^T = B^T A^T$

अर्थात् कुनै दुई ओटा मेट्रिक्सहरूको गुणनफलको क्रम परिवर्तन मेट्रिक्स ती दुई मेट्रिक्सहरूका क्रम परिवर्तन मेट्रिक्सहरूको विपरीत क्रमको गुणनफलसँग बराबर हुन्छ ।

अभ्यास 3.5

1. (a) तलका मध्ये कुन कुन मेट्रिक्सहरूको गुणन सम्भव छ ? कारणसहित उल्लेख गर्नुहोस् ।

$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

$C = \begin{bmatrix} a & d \\ b & e \\ c & f \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} p & q & r \\ w & x & y \end{bmatrix}$

$E = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{bmatrix}$, $F = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{7} \\ \sqrt{3} & \sqrt{11} \\ \sqrt{5} & \sqrt{13} \end{bmatrix}$

$G = [2 \quad 5 \quad 3]$, $H = \begin{bmatrix} 5 \\ 25 \end{bmatrix}$

(b) माथि दिइएका मेट्रिक्सहरूमा कुन कुन मेट्रिक्सको वर्ग (जस्तै : $A^2 = A \times A$) परिभाषित हुन्छ ? कारणसहित गणना पनि गर्नुहोस् ।

(c) कुनै मेट्रिक्सको घन (जस्तैः ($A^3 = A \times A \times A$) कुन अवस्थामा परिभाषित हुन्छ ?

(d) मेट्रिक्सको स्केलर गुणन उदाहरणसहित परिभाषित गर्नुहोस् ।

(e) मेट्रिक्सहरूको गुणनका गुणहरू उल्लेख गर्नुहोस् ।

2. (a) यदि $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ भए 7A को मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

(b) यदि $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 3 & 5 & 7 \end{bmatrix}$ र $B = \begin{bmatrix} 0 & 3 & -2 \\ -2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ भए 2A + 3B को मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

(c) यदि $L = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$, $M = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ र $N = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ भए X = 2L + 3M - N हुने मेट्रिक्स X पत्ता लगाउनुहोस् ।

(d) यदि $L = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ x & 2 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 3 & y \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & -7 \\ 6 & z \end{bmatrix}$ भए x, y र z को मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

(e) यदि $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 7 \end{pmatrix}$ र $C = \begin{pmatrix} 6 & 6 \\ 8 & 10 \end{pmatrix}$ भए निम्न अवस्थामा मेट्रिक्स X को मान पत्ता लगाउनुहोस् : 3A + B + X = C

3. (a) निम्न मेट्रिक्सहरूको गुणनफल पत्ता लगाउनहोस् :

(i) $[2 \quad 3]\begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}[1 \quad 5]$ (iii) $[1 \quad 2 \quad 3]\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{bmatrix}$

(b) यदि $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ र $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ भए निम्न मेट्रिक्सहरू पत्ता लगाउनुहोस् ।

(i) AB (ii) BC (iii) A^2 (iv) C^2 (v) (A+B)C

(c) यदि $M = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -1 & 4 & 9 \end{bmatrix}$ र $N = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 2 \\ -3 & -3 \end{bmatrix}$ भए MN र NM पत्ता लगाई तुलना गर्नुहोस् ।

(d) यदि $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -4 & -5 \end{bmatrix}$ र $B = \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ भए प्रमाणित गर्नुहोस् ।

(i) $AB \neq BA$ (ii) $(AB)^T = B^T.A^T$

(e) यदि $A = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -7 & -3 \end{bmatrix}$ र $B = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 2 & -5 \end{bmatrix}$ भए AB एक शून्य मेट्रिक्स हुन्छ भनी प्रमाणित गर्नुहोस् ?

(f) यदि $P = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 4 \end{bmatrix}$ र $Q = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -7 & 2 \end{bmatrix}$ भए PQ एकात्मक हुन्छ भनी प्रमाणित गर्नुहोस् ?

4. (a) यदि $X = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$ र $XY = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ भए मेट्रिक्स Y पत्ता लगाउनुहोस् ।

(b) यदि $\begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 5 & 7 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 4 \\ 9 \end{bmatrix}$ भए मेट्रिक्स X पत्ता लगाउनुहोस् ।

(c) यदि $\begin{bmatrix} 2x+3 \\ y-2 \\ 3z+4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -8 \\ 12 & 20 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \end{bmatrix}$ भए x, y र z को मा पत्ता लगाउनुहोस् ।

(d) यदि $P = \begin{bmatrix} 4 & 9 \\ 16 & 25 \end{bmatrix}$ र $PQ = \begin{bmatrix} 4 & 9 \\ 16 & 25 \end{bmatrix}$ भए मेट्रिक्स Q पत्ता लगाउनुहोस् ।

(e) यदि $\begin{bmatrix} 8 & -2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} A = 2 \begin{bmatrix} 6 \\ 5 \end{bmatrix}$ भए मेट्रिक्स A पत्ता लगाउनुहोस् ।

(f) यदि $M = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$, $N = \begin{bmatrix} x & y \\ o & z \end{bmatrix}$ र MN = M + N भए x, y र z को पत्ता लगाउनुहोस् ।

5. (a) यदि $X = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, I र O क्रमशः 2×2 का एकात्मक र शून्य मेट्रिक्स भए $X^2 - 6X + 9I = 0$ हुन्छ भनी प्रमाणित गर्नुहोस् ।

(b) यदि $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ र एउटा 2×2 को एकात्मक मेट्रिक्स भए प्रमाणित गर्नुहोस् : (A - 2I) (A - 3I) = O

(c) यदि $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, भए प्रमाणित गर्नुहोस् । (i) $P^2 - 2P = O$ (ii) $2P^2 = P^3$
जहाँ O एउटा 2×2 को शून्य मेट्रिक्स हो ।

(b) यदि $A = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$ भए $A^2 - 5A = 14I$ हुन्छ भनी देखाउनुहोस, जहाँ, I एउटा 2×2 क्रमको एकाइ मेट्रिक्स हो ।

(c) यदि $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, B \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 7 & 9 \end{pmatrix}$ र $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, भए प्रमाणित गर्नुहोस् ।

(i) $AB \neq BA$ (ii) $A(BC) = (AB)C$ (iii) $A(B+C) = AB + AC$

(iv) $IA = AI = A$ (v) $(AB)^T = B^T. A^T$

6. तिन तिन जनाको समूह बनाई दैनिक जीवनमा मेट्रिक्स प्रयोगका क्षेत्रहरू खोजी गर्नुहोस् । कम्तीमा 3 ओटा क्षेत्रबाट केही तथ्याङ्क सङ्कलन गरी मेट्रिक्सका रूपमा प्रस्तुत गर्दै मेट्रिक्सका क्रियाको प्रयोगको व्याख्या गर्नुहोस् ।

एकाइ **4**

निर्देशाङ्क ज्यामिति (Coordinate Geometry)

4.0 पुनरावलोकन (Review)

तलका प्रश्नहरूका बारेका समूहमा छलफल गर्नुहोस् :

(a) चतुर्थांश कति ओटा हुन्छन् ?

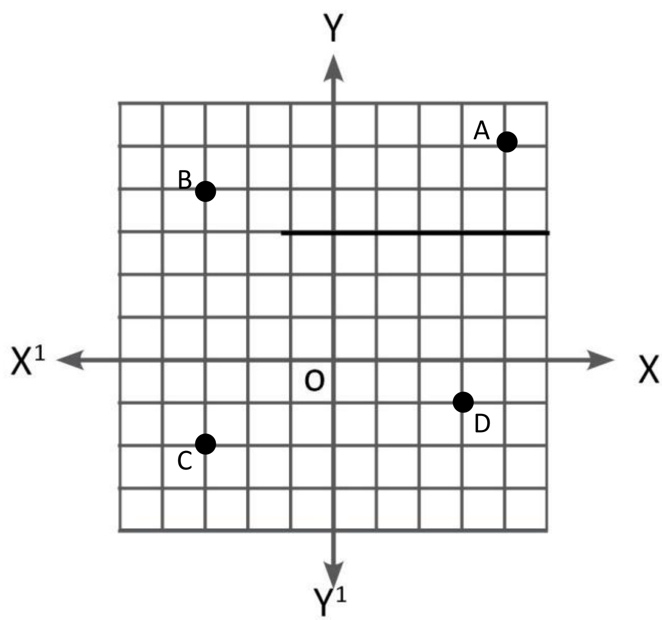
(b) प्रत्येक चतुर्थांशका बिन्दुहरूको निर्देशाङ्कका चिह्नहरू के के हुन् ?

(c) X – अक्ष र Y – अक्षमा पर्ने कुनै बिन्दुका निर्देशाङ्कहरू के के हुन्छन् ?

(d) तलको चित्रबाट बिन्दुहरू A, B, C र D का निर्देशाङ्कहरू लेख्नुहोस् ।

(e) बिन्दु A(x_1, y_1) र B(x_2, y_2) बिचको दुरी कति हुन्छ ?

(f) बिन्दुहरू (-5, 2) र (3,1) को बिचको दुरी कति एकाइ हुन्छ ?



चित्र न. 4.1

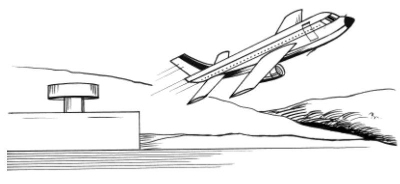
4.1 बिन्दुपथ (Locus)

तलका क्रियाकलाप गर्नुहोस् :

(a) तपाईंहरू बस चढ्नु भएको छ ? एक पटक बस चढेदेखि ओर्लिएको ठाउँसम्मको बाटो कस्तो थियो ? चित्र कोरी कस्तो चित्र बन्छ ? छलफल गर्नुहोस् ।

चित्र न. 4.2

(b) तपाइँहरूले हवाईजहाज उडेको देख्नुभएको छ ? तपाइँको ठाउँबाट उडिरहेको हवाईजहाजलाई कहाँबाट कहाँसम्म उडेको देख्नुहुन्छ ? त्यसले आकाशमा पार गरेको हवाईमार्ग कस्तो छ ?



चित्र न. 4.3

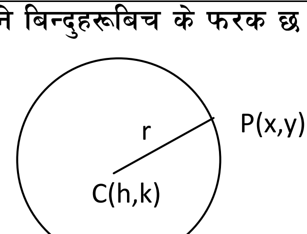
(c) तपाइँहरूले नदी देख्नुभएको छ ? नदी कतातर्फ बगेको थाहा पाउनु भएको छ ? तपाइँले देखेको नदीको सुरु बिन्दुदेखि अन्तिम बिन्दुसम्मको नक्सा बनाउनुहोस् ।

चित्र न. 4.4

निश्चित सर्तहरूका आधारमा कुनै चलायमान बिन्दुले तय गरेको बाटो नै बिन्दुपथ हो ।
Locus is the path traced out by a moving point under certain conditions.

ती सर्तहरू के के हुन सक्छन् ? ती सर्तहरू मान्य हुने र मान्य नहुने बिन्दुहरूबिच के फरक छ ? छलफल गर्नुहोस् ।

उदाहरणका लागि कुनै निश्चित बिन्दुबाट बराबर दुरीमा पर्ने बिन्दुको बिन्दुपथ वृत्त हो । निश्चित बिन्दु वृत्तको केन्द्र र बराबर दुरी वृत्तको अर्धव्यास हो ।



चित्र न. 4.5

दिइएको वृत्तको केन्द्र C(h, k) र परिधिको कुनै बिन्दु P(x, y) छ भने,

दुरी सूत्रबाट,

$r = \sqrt{(x-h)^2 + (y-k)^2}$

अथवा, $r^2 = (x - h)^2 + (y - k)^2$ ले वृत्तको समीकरण दिन्छ। यसलाई बिन्दुपथको समीकरण भनिन्छ। यसरी विभिन्न ज्यामितीय सर्तहरू प्रयोग गरी बिन्दुपथका समीकरण निकाल्ने गरिन्छ।

उदाहरण 1

बिन्दु (1, 2) समीकरण $x^2 + y^2 + kx + 3y + 6 = 0$ भएको बिन्दु पथमा पर्छ भने k को मान पत्ता लगाउनुहोस्।

समाधान

यहाँ, $(x, y) = (1, 2)$ समीकरण $x^2 + y^2 + kx + 3y - 6 = 0$ मा पर्ने भएकाले

$1^2 + 2^2 + k \times 1 + 3 \times 2 + 6 = 0$

अथवा, $1 + 4 + k + 6 + 6 = o$

अथवा, $17 + k = 0$

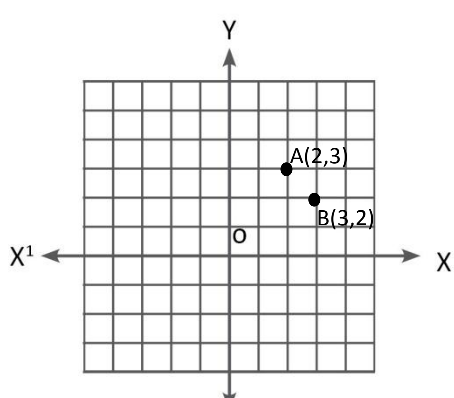
अथवा, $k = -17$

$\therefore k = -17$

उदाहरण 2

बिन्दुहरू (3, 2) र (2, 3) बाट बराबर दुरीमा भएर चल्ने बिन्दुको बिन्दुपथ पत्ता लगाउनुहोस् :

समाधान



चित्र न. 4.6

यहाँ, बिन्दुहरू A(3, 2) र B(2, 3) बाट बराबर दुरी भएर चल्ने बिन्दु P को निर्देशाङ्क (x, y) मानौँ ।

तब, AP = BP

अथवा, $AP^2=BP^2$

अथवा, $(x - 3)^2 +(y - 2)^2 = (x - 2)^2 +(y - 3)^2$

अथवा, $x^2 - 6x + 9 + y^2 - 4y + 4 = x^2 - 4x + 4 + y^2 - 6y + 9$

अथवा, $-2x + 2y = 0$

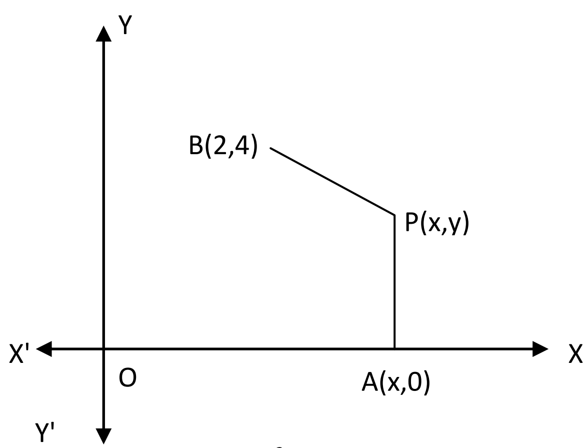
अथवा, $-2(x - y) = 0$

$\therefore\ x - y = 0$ आवश्यक बिन्दुपथको समीकरण हो ।

उदाहरण 3

X- अक्षदेखिको दुरी, बिन्दु (2, 4) देखिको दुरीभन्दा दोब्बर हुनेगरी चल्ने बिन्दुको बिन्दुपथ पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान



चित्र न. 4.7

यहाँ, x – अक्षमा पर्ने बिन्दु A $(x, 0)$, बिन्दु B(2, 4) र चल बिन्दु P(x, y) छ भनी मानौँ

अब प्रश्नअनुसार,

AP = 2BP

अथवा, $AP^2 = 4BP^2$

अथवा, $(x - x)^2 + (y - 0)^2 = 4\{(x - 2)^2 + (y - 4)^2\}$

अथवा, $y^2 = 4(x^2 - 4x + 4 + y^2 - 8y + 16)$

अथवा, $y^2 = 4x^2 - 16x + 4y^2 - 32y + 80$

$\therefore 4x^2 + 3y^2 - 16x - 32y + 80 = 0$ आवश्यक समीकरण हो ।

उदाहरण 4

यदि A(2, 3) र B(-4, 7) दिइएका बिन्दुहरू र P(x, y) चल बिन्दु भए $PA^2 = AB^2$ को अवस्थामा बिन्दुपथको समीकरण पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान

यहाँ, A(2, 3) र B(-4, 7) छन् । चल बिन्दु P को निर्देशाङ्क (x, y) छ ।

अब, $PA^2 = AB^2$

अथवा, $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = (-4 - 2)^2 + (7 - 3)^2$

अथवा, $x^2 - 4x + 4 + y^2 - 6y + 9 = 36 + 16$

अथवा, $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 13 - 36 - 16 = 0$

$\therefore x^2 + y^2 - 4x - 6y - 39 = 0$ आवश्यक बिन्दुपथको समीकरण हो ।

अभ्यास 4. 1

1. (a) दुई बिन्दुबिचको दुरी निकाल्ने सूत्र लेख्नुहोस् ।

   (b) बिन्दुपथ भनेको के हो, लेख्नुहोस् ।

2. तल दिइएका दुई बिन्दुहरूबिचको दुरी पत्ता लगाउनुहोस् :

   (a) (2, 3) र (4, 3) (b) (-1, 3) र (5, 1)

   (c) (1, 2) र (-2, 2) (d) (3, -1) र (-1, -1)

3. (a) बिन्दुहरू D(-2,3), E(3,8) र F(4,1) ले समद्विबाहु त्रिभुज बन्छ भनी प्रमाणित गर्नुहोस् ।

   (b) बिन्दुहरू (3,3), (-3,-3) र $(-3\sqrt{3}, 3\sqrt{3}$ समबाहु त्रिभुजका शीर्षबिन्दुहरू हुन् भनी प्रमाणित गर्नुहोस् ।

   (c) बिन्दुहरू (2, 0), (5 2), (2, 4) र (-1, 2) समबाहु चतुर्भुजका शीर्षबिन्दुहरू हुन् भनी प्रमाणित गर्नुहोस् ।

4. कुन कुन बिन्दुहरू (3, 2), (4, 3), (5, 0) र (0, -5) समीकरण $x^2 + y^2 = 25$ भएको बिन्दुपथमा पर्छन् ? पत्ता लगाउनुहोस् ।

5. (a) यदि समीकरण $kx^2 - 2y^2 - 2x + 3y - 3 = 0$ मा बिन्दु (2, -1) पर्छ भने k को मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

(b) यदि बिन्दुपथ $3x - y + 7 = 0$ मा बिन्दु (k – 1, K + 3) पर्छ भने k को मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

6. (a) बिन्दु (-2, 1) र (4, 1) बाट बराबर दुरीमा चल्ने बिन्दुको बिन्दुपथको समीकरण निकाल्नुहोस् ।

(b) बिन्दु (1, 2) र y – अक्षबाट बराबर दुरीमा चल्ने बिन्दुको बिन्दुपथको समीकरण निकाल्नुहोस् ।

(c) उद्गम बिन्दुबाट 4 एकाइ दुरीमा चल्ने बिन्दुको बिन्दुपथको समीकरण पत्ता लगाउनुहोस् ।

(d) बिन्दु (-2, 5) र x – अक्षदेखि बराबर दुरी भएर चल्ने बिन्दुको बिन्दुपथको समीकरण पत्ता लगाउनुहोस् ।

7. (a) दुई अचल बिन्दु A(7, 0) र B(-7, 0) र एउटा चल बिन्दु P छ भने तल दिइएको अवस्थामा बिन्दु P को बिन्दुपथको समीकरण पत्ता लगाउनुहोस् :

$PA^2 + PB^2 = AB^2$

(b) A(3, 2) र B(7, -4) बिन्दुहरू र P(x, y) चल बिन्दु भए तलका अवस्थामा बिन्दुपथको समीकरण पत्ता लगाउनुहोस् :

(i) PA = PB (ii) AP = 2PB (iii) $PA^2 = AB^2$

8. (a) बिन्दु (2, -3) देखिको भन्दा बिन्दु (0, 2) देखिको दुरी आधा हुने गरी चल्ने बिन्दुको बिन्दुपथको समीकरण निकाल्नुहोस् ।

(b) बिन्दु (0, -2) देखिको भन्दा बिन्दु (1, 0) देखिको दुरी दोब्बर हुने गरी चल्ने बिन्दुको बिन्दुपथको समीकरण निकाल्नुहोस् ।

(c) बिन्दु (0, 2) देखिको भन्दा बिन्दु (3, 0) को दुरी तेब्बर हुने गरी चल्ने बिन्दुको बिन्दुपथको समीकरण निकाल्नुहोस् ।

(d) x – अक्षदेखिको भन्दा बिन्दु (3, 4) देखिएको दुरी दोब्बर हुने गरी चल्ने बिन्दुको बिन्दुपथको समीकरण निकाल्नुहोस् ।

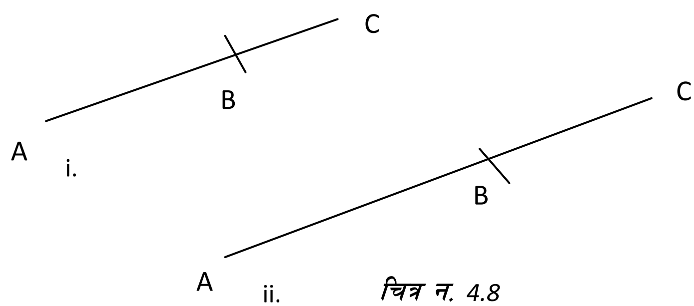
(e) y – अक्ष देखिको भन्दा बिन्दु (-2, 5) देखिको दुरी आधा हुने गरी चल्ने बिन्दुको बिन्दुपथ पत्ता लगाउनुहोस् ।

9. (a) तपाईँको विद्यालयको प्राङ्गणको एउटा कुनालाई उदगम बिन्दु लिई प्राङ्गणको कुनै दुई स्थानको निर्देशाङ्क निकाली ती दुई स्थानबिचको दुरी पत्ता लगाउनुहोस् । [एकाइ मिटरमा लिनुहोस् ।]

(b) बिन्दुपथको प्रयोग कुन कुन क्षेत्रमा गर्न सकिन्छ ? कक्षामा छलफल गरी सूची बनाउनुहोस् ।

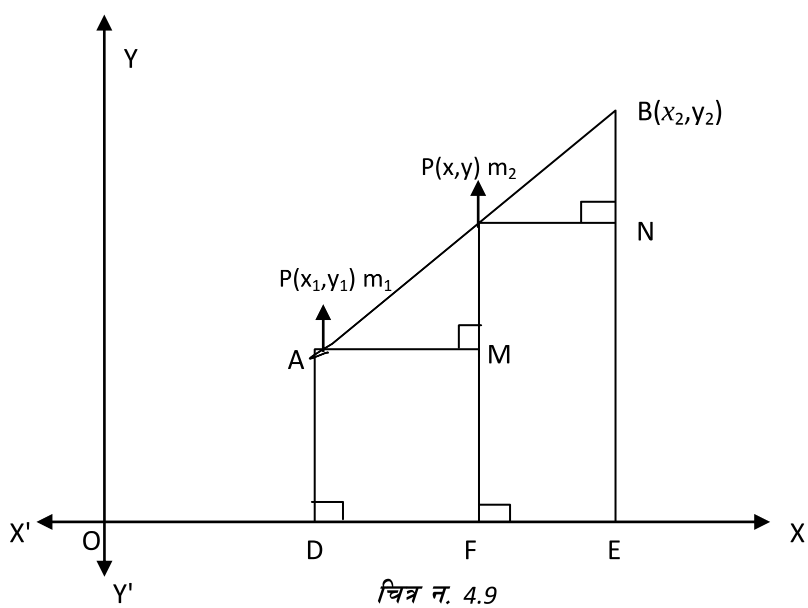
4.2 खण्डसूत्र (Section Formula):

अनुपात भन्नाले के बुझिन्छ, छलफल गर्नुहोस् ।



चित्र न. 4.8

माथि चित्र 4.3 (i) र (ii) मा दुरी AB र BC नापी तिनीहरूको बिचको अनुपात AB:BC पत्ता लगाउनुहोस् ।



चित्र न. 4.9

माथिको चित्रमा A(x_1, y_1) र B(x_2, y_2) जोड्ने रेखालाई P(x,y) ले m_1:m_2 को अनुपातमा विभाजन गरेको छ ।

अब, $AD\perp OX$, $BE\perp OX$, $PF\perp OX$, $AM\perp PF$ र $PN\perp BE$ खिचौँ ।

चित्रमा, AM =DF = OF = OD = $x - x_1$,

PN = FE = OE – OF = $x_2 - x$

PM = PF – MF = PF – AD = $y - y_1$

BN = BE – NE = BE – PF = $y_2 - y$

AP = m_1 र BP = m_2 छ ।

समकोणी त्रिभुजहरू ΔPMA र ΔBNP समरूप हुन्छन् ।

$\therefore \frac{\text{AM}}{\text{PN}} = \frac{\text{AP}}{\text{BP}}$ [∴ समरूप त्रिभुजका सङ्गत भुजाहरूको अनुपात भएकाले]

अथवा, $\frac{x-x_1}{x_2-x} = \frac{m_1}{m_2}$

अथवा, $m_2x - m_2x_1 = m_1x_2 - m_1x$

अथवा, $m_2x + m_1x = m_1x_2 + m_2x_1$

अथवा, $x(m_1 + m_2) = m_1x_2 + m_2x_1$

अथवा, $x = \frac{m_1x_2+m_2x_1}{m_1+m_2}$

त्यस्तै, $y = \frac{m_1y_2+m_2y_1}{m_1+m_2}$

$\therefore (x, y) = \left(\frac{m_1x_2+m_2x_1}{m_1+m_2}, \frac{m_1y_2+m_2y_1}{m_1+m_2}\right)$

केही विशेष अवस्थाहरू (Some special cases)

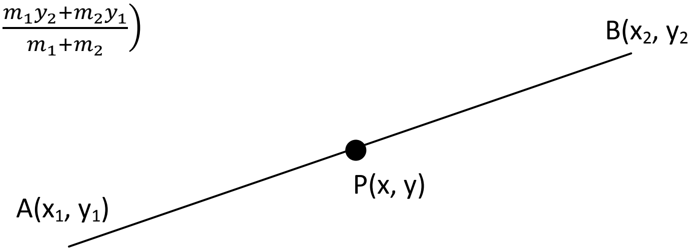
(i) यदि P(x, y) बिन्दुहरू A(x_1, y_1) र B(x_2, y_2) जोड्ने रेखाखण्डको मध्यबिन्दु हो भने

AP = BP र AP:BP = m_1:m_2 = 1:1 हुन्छ ।

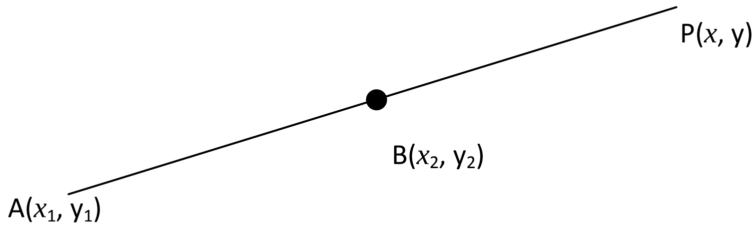
तब, $P(x, y) = \left(\frac{m_1x_2+m_2x_1}{m_1+m_2}, \frac{m_1y_2+m_2y_1}{m_1+m_2}\right)$

$= \left(\frac{x_2+x_2}{1+1}, \frac{y_1+y_2}{1+1}\right)$

$= \left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$



(ii) यदि P(x, y) ले बिन्दुहरू A(x_1, y_1) र B (x_2, y_2) जोड्ने रेखाखण्डलाई बाहिरबाट $m_1 : m_2$को अनुपातमा विभाजन गर्दा AP:BP = m_1: m_2 हुन्छ ।



$\therefore$ (x, y) = $\left(\frac{m_1x_2 - m_2x_1}{m_1 - m_2}, \frac{m_1y_2 + m_2y_1}{m_1 - m_2}\right)$

उदाहरण 1

(a) बिन्दुहरू (1, 7) र (6, -3) जोडने रेखाखण्डलाई 2:3 को अनुपातमा विभाजन गर्ने बिन्दुको निर्देशाङ्क पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान

यहाँ, (x_1, y_1) = (1, 7)

(x_2, y_2) = (6, -3)

m_1 : m_2 = 2:3

(x, y) = ?

अब,

(x, y) $= \left(\frac{m_1x_2 + m_2x_1}{m_1 + m_2}, \frac{m_1y_2 + m_2y_1}{m_1 + m_2}\right) = \left(\frac{2\times6+3\times1}{2+3}, \frac{2(-3)+3\times7}{2+3}\right)$

$= \left(\frac{2\times6+3\times1}{2+3}, \frac{2\times(-3)+3\times7}{2+3}\right) = \left(\frac{12+3}{5}, \frac{-6+21}{5}\right)$

$= \left(\frac{15}{5}, 3\right) = (3, 3$

(b) बिन्दुहरू (5, -2) र (9,6) जोड्ने रेखाखण्डलाई बाहिरबाट 3:1 को अनुपातमा विभाजन गर्ने बिन्दुको निर्देशाङ्क पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान

यहाँ, (x_1, y_1) = (5, -2), (x_2, y_2) = (9, 6)

र m_1:m_2 = 3:1 बाहिरबाट

(x, y) = ?

अब, $(x, y) = \left(\frac{m_1x_2 - m_2x_1}{m_1 - m_2}, \frac{m_1y_2 - m_2y_1}{m_1 - m_2}\right)$

$= \left(\frac{3\times9-1\times5}{3-1}, \frac{2\times6-1\times(-2)}{3-1}\right)$

$= \left(\frac{27-5}{2}, \frac{18+2}{2}\right) = (11, 10)$

उदाहरण 2

बिन्दु (3, -2) ले बिन्दुहरू (1, 4) र (-2, 16) जोड्ने रेखाखण्डलाई कुन अनुपातमा विभाजन गर्दछ ?

समाधान

यहाँ, $(x_1, y_1) = (1, 4)$, $(x_2, y_2) = (-3, 16)$ र $(x, y) = (3, -2)$

अनुपात $m_1:m_2 = ?$

अब, $x = \frac{m_1x_2 + m_2x_1}{m_1 + m_2}$

अथवा, $3 = \frac{m_1(-3)+m_2(1)}{m_1+m_2}$

अथवा, $3m_1 + 3m_2 = -3m_1 + m_2$

अथवा, $6m_1 = -2m_2$

अथवा, $\frac{m_1}{m_2} = \frac{-2}{6} = -\frac{1}{3}$

अथवा, $m_1:m_2 = 1:-3$

$\therefore$ बिन्दु (3, -2) ले बिन्दुहरू (1, 4) र (-3, 16) जोड्ने रेखाखण्डलाई बाहिरबाट 1:3 को अनुपात विभाजन गर्दछ ।

उदाहरण 3

बिन्दु (2, 1) ले बिन्दुहरू (1, -2) र (p, q) जोड्ने रेखाखण्डलाई 1:2 को अनुपातमा विभाजन गर्दछ भने (p, q) को मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान

यहाँ, $(x, y) = (2,1)$, $(x_1, y_1) = (1, 2)$, $(x_2, y_2) = (p, q)$ र $m_1:m_2 = 1:2$

अब, $x = \frac{m_1x_2 + m_2x_1}{m_1 + m_2}$

अथवा, $2 = \frac{1\times p+2\times 1}{1+2}$

अथवा, $2 = \frac{p+2}{3}$

अथवा, $p + 2 = 6$

अथवा, $p = 6 - 2 = 4$

त्यस्तै, $y = \frac{m_1y_2+m_2y_1}{m_1+m_2}$

अथवा, $1 = \frac{1\times q+2\times(-2)}{1+2}$

अथवा, $1 = \frac{q-4}{3}$

अथवा, $q - 4 = 3$

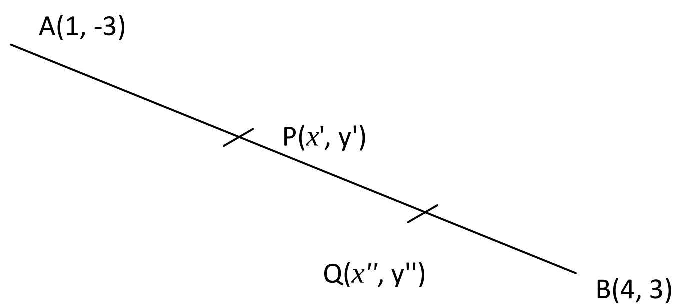
अथवा, $q = 7$

$\therefore (p, q) = (4, 7)$

उदाहरण 4

बिन्दुहरू (1, -3) र (4, 3) जोड्ने रेखाखण्डलाई तिन बराबर खण्डमा विभाजन गर्ने बिन्दुहरूका निर्देशाङ्क पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान



मानौँ, A(1, -3) र B(4, 3) जोड्ने रेखाखण्डलाई बिन्दुहरू $P(x', y')$ र $Q(x'', y'')$ ले तिन बराबर खण्डमा विभाजन गर्दछ ।

बिन्दु P का लागि, $(x_1, y_1) = (1, -3)$, $(x_2, y_2) = (4, 3)$

र $m_1:m_2 = AP : BP = AP : (PQ + BQ) = AP : (AP + AP) = AP : 2AP = 1 : 2$

$(x, y) = (x', y') = ?$

अब, $(x, y) = \left(\frac{m_1x_2+m_2x_1}{m_1+m_2}, \frac{m_1y_2+m_2y_1}{m_1+m_2}\right)$

अथवा, $(x', y') = \left(\frac{1\times4+2\times1}{1+2}, \frac{1\times3+2\times(-3)}{1+2}\right)$

$= \left(\frac{4+2}{3}, \frac{3-6}{3}\right)$

= (2, -1)

त्यस्तै, PB को मध्यबिन्दु Q हुने भएकाले

$(x_1, y_1) = (2, -1)$, $(x_2, y_2) = (4, 3)$ र मध्यबिन्दु $(x'', y'') = ?$

अब, $(x'', y'') = \left(\frac{x_1+x_1}{2}, \frac{y_1+y_1}{2}\right)$

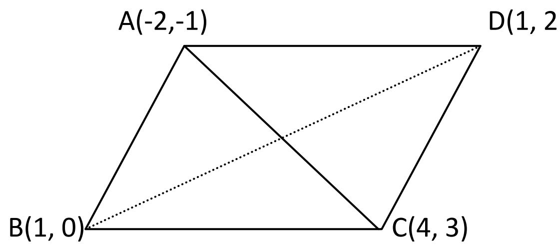
$= \left(\frac{2+4}{2}, \frac{-1+3}{2}\right) = (3, 1)$

अत: बिन्दुहरू (1, -3) र (4, 3) जोड्ने रेखाखण्डलाई तिन बराबर खण्डमा विभाजन गर्ने दुई बिन्दुहरू क्रमश: (2, -1) र (3, 1) हुन् ।

उदाहरण 5

बिन्दुहरू (-2, -1), (1, 0), (4, 3) र (1, 2) समानान्तर चतुर्भुजका शीर्षबिन्दुहरू हुन् भनी प्रमाणित गर्नुहोस् ।

समाधान



यहाँ, A(-2, 1), B(1, 0), C(4, 3) र D(1, 2) चतुर्भुज ABCD का शीर्षबिन्दुहरू छन् ।

अब, विकर्ण AC को मध्यबिन्दु $= \left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$

$= \left(\frac{-2+4}{2}, \frac{-1+3}{2}\right) = (1, 1)$

त्यस्तै, विकर्ण BD को मध्यबिन्दु $= \left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$

$= \left(\frac{1+1}{2}, \frac{0+2}{2}\right) = (1, 1)$

अत: दुवै विर्कणहरूको मध्यबिन्दु एउटै भएकाले चतुर्भुज ABCD समानान्तर चतुर्भुज हो । अर्थात दिएका बिन्दुहरू समानान्तर चतुर्भुजका शीर्षबिन्दुहरू हुन् ।

अभ्यास 4. 2

1. (a) खण्डरूपको सूत्र लेख्नुहोस् ।

   (b) खण्डरूपका विशेष अवस्थाहरू के के हुन्, लेख्नुहोस् ।

2. तल दिइएका बिन्दुहरू जोड्ने रेखाखण्डलाई दिइएको अनुपातमा भित्रपट्टिबाट विभाजन गर्ने बिन्दुको निर्देशाङ्क पत्ता लगाउनुहोस् :

(a) बिन्दुहरू (6, -10) र (-4, 14) अनुपात 3:4 (b) बिन्दुहरू (3, 5) र (-2, -7) अनुपात 3:2

(c) बिन्दुहरू (4, 3) र (6, 3) अनुपात 2:5

3. तल दिइएका बिन्दुहरू जोड्ने रेखाखण्डलाई बाहिरपट्टिबाट दिइएको अनुपातमा विभाजन गर्ने बिन्दुको निर्देशाङ्क पत्ता लगाउनुहोस् :

   (a) बिन्दुहरू (-3, 2) र (6. 5) अनुपात 2:1 (b) बिन्दुहरू (-3, 2) र (4, -4) अनुपात 4:3

   (c) बिन्दुहरू (3, -2) र (-3, -4) अनुपात 1: 2

4. (a) बिन्दु (-2, 2) ले बिन्दुहरू (-4, 6) र $\left(1/_2, -3\right)$ जोड्ने रेखाखण्डलाई कुन अनुपातमा विभाजन गर्दछ ?

   (b) बिन्दु (1, 3) ले बिन्दुहरू (4, 6) र (3, 5) जोड्ने रेखाखण्डलाई कुन अनुपातमा विभाजन गर्दछ ?

   (c) बिन्दु $\left(1/_2, -3/_2\right)$ ले बिन्दुहरू (3, -5) र (-7, 9) जोडने रेखाखण्डलाई कुन अनुपातमा विभाजन गर्छ ।

5. (a) बिन्दुहरू (-3, -6) र (1, -2) जोड्ने रेखाखण्डको मध्यबिन्दु पत्ता लगाउनुहोस् ।

   (b) बिन्दुहरू M(1, 4) र N(x', y') जोड्ने रेखाखण्डको मध्यबिन्दु (-2, 2) भए (x', y') को मान पत्ता लगाउनुहोस् ?

   (c) कुनै रेखाखण्डको मध्यबिन्दु (4, 3) र एकछेउ बिन्दु (0, 2) भए अर्को छेउको बिन्दु पत्ता लगाउनुहोस् ?

   (d) A(2, -1), B(- 1, 4) र C(-2, 2) छ भने $\triangle$ABC का प्रत्येक भुजाका मध्यबिन्दुहरू पत्ता लगाउनुहोस् ।

6. दिइएका बिन्दुहरूलाई बराबर तिन भागमा विभाजन गर्ने बिन्दुहरूका निर्देशाङ्क पत्ता लगाउनुहोस् :

   (a) A(1, -3) र B(4, 3) (b) P(1, -2) र Q(-3, 4) (c) M(-5, -5) र N(25, 10)

7. (a) बिन्दुहरू (2, 3) र (5, 6) जोड्ने रेखाखण्डलाई x – अक्षले कुन अनुपातमा विभाजन गर्छ ?

(b) बिन्दुहरू (-4, 5) र (3, -7) जोड्ने रेखाखण्डलाई y – अक्षले कुन अनुपातमा विभाजन गर्छ ।

(c) बिन्दुहरू (7, -3) र (-2, -5) जोड्ने रेखाखण्डमा (3, y) बिन्दु पदर्छ भने y को मान पत्ता लगाउनुहोस् ?

(d) (2, 3) र (-6, 5) जोड्ने रेखाखण्डमा (x, - 5) बिन्दु पदर्छ भने x को मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

8. दिइएका बिन्दुहरू समानान्तर चुतुर्भुजका शीर्षबिन्दुहरू हुन् भनी प्रमाणित गनुहोस् ।

(a) (1, 2), (3, 0), (7, 4) र (5, 6) (b) (-1, 0) (3, 1) (2, 2) र (-2, 1)
(c) (3- 2) (4, 0) (6, -3) र (5, -5)

9. तल दिइएका तिन ओटा बिन्दुहरू समानान्तर चतुर्भुजका क्रमश: तिन शीर्षबिन्दुहरू हुन् भने चौथो शीर्षबिन्दुको निर्देशाङ्क पत्ता लगाउनुहोस् ।

(a) A(2, 3), B(4, -1) र C(0,5) (b) A(2, 6), B(6, 2) र C(12, 4)
(c) (1, 2), (3, 1) र (5, 3)

10. (a) बिन्दुहरू (1, 2), (3, 0), (x, 4) र (5, y) समानान्तर चर्तुभुका शीर्षबिन्दुहरू हुन् भने x र y को मान निकाल्नुहोस् ।

(b) दुई ओटा शीर्षबिन्दुहरू क्रमश: (3, 2) र (5, 10) भएका समानान्तर चतुर्भुजका विकर्णहरू बिन्दु (3, 4) मा काटिएका छन् भने बाँकी शीर्षबिन्दुहरू पत्ता लगाउनुहोस् ।

11. खण्डसूत्र प्रयोग गरी प्रमाणित गर्न सकिने ज्यामितीय चित्रका गुणहरू के के हुन्छन् ? छलफल गरी सूची बनाउनुहोस् ।

4.3 सिधारेखाको समीकरण (Equation of Straight Line)

तलका प्रश्नहरूका बारेमा समूहमा छलफल गर्नुहोस् :

(a) सिधारेखा र वक्ररेखामा के फरक छ ?

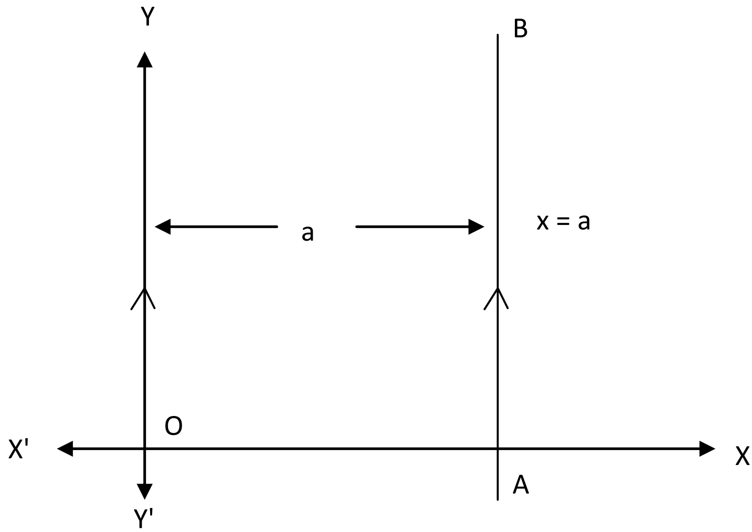
(b) दिइएको तालिकाका आधारमा लेखाचित्रमा बिन्दुहरू पत्ता लगाई जोड्नुहोस् । कस्तो चित्र बन्छ बताउनुहोस् ।

x	0	1	2	3
y	2	3	4	5

(c) समीकरण $x + y - 1 = 0$ को ग्राफ खिच्नुहोस् । कस्तो चित्र बन्छ, बताउनुहोस् ।

(क) अक्षहरूसँग समानान्तर हुने रेखाको समीकरण **(Equation of Straight Line Parallet to Co-ordinate Axes)**

i. y – अक्षसँग समानान्तर हुने रेखाको समीकरण (Equation of Line Parallel to Y - axis)



दिइएको चित्रमा रेखा AB, y – अक्षसँग समानान्तर छ र y –अक्षदेखि AB सम्मको दुरी a एकाइ छ ।

अत : AB मा पर्ने प्रत्येक बिन्दुको x - निर्देशाङ्क a हुन्छ । त्यसकारण x = a रेखा AB को समीकरण हो । यदि रेखा AB, y- अक्षको बायाँपट्टि र y – अक्षदेखिको दुरी a हुन्छ भने यसको समीकरण के हुनसक्छ ? छलफल गरी पत्ता लगाउनुहोस् ।

उदाहरण 1

y- अक्षदेखि 6 एकाइ दायाँको दुरीमा रहने र y – अक्षसँग समानान्तर हुने रेखाको समीकरण पत्ता लगाई चित्रमा देखाउनुहोस् ।

समाधान

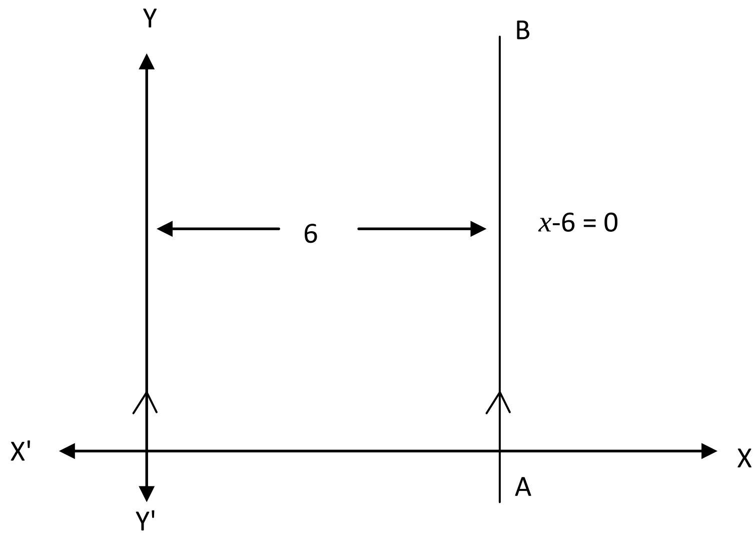
यहाँ y – अक्षसँग समानान्तर हुने रेखाको समीकरण x = a हुन्छ ।

y –अक्षदेखि 6 एकाइ दायाँ पर्ने रेखाका लागि a = 6

तब, आवश्यक रेखाको समीकरण x = a

अथवा, x = 6

अथवा, x -6 =0



उदाहरण 2

X- अक्षसँग समानान्तर हुने र बिन्दु (-2, 5) बाट जाने सरल रेखाको समीकरण पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान

यहाँ, सरल रेखाको समीकरण $x = a$

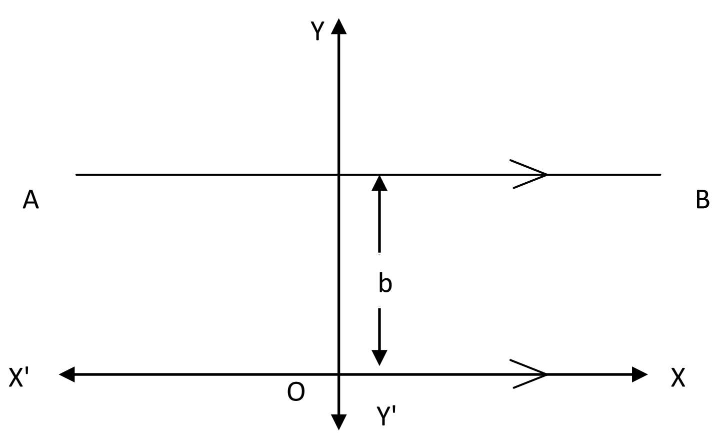
यो रेखा बिन्दु (-2, 5) बाट जाने भएकाले, $a = -2$

$\therefore$ चाहिएको समीकरण $x = a$

अथवा, $x = -2$

अथवा, $x + 2 = 0$

ii. x -अक्षसँग समानान्तर हुने रेखाको समीकरण (Equation of a line parallel to x- axis)



माथिको चित्रमा रेखा AB, X – अक्षसँग समानान्तर छ र X – अक्षबाट b एकाइको दुरीमा छ । यो रेखामा पर्ने प्रत्येक बिन्दुको y – निर्देशाङ्क b हुने भएकाले रेखा AB को समीकरण y = b हुन्छ ।

यदि रेखा AB, X – अक्षको तल र X – अक्षदेखि b एकाइ दुरीमा पर्छ भने रेखा AB को समीकरण के हुन सक्छ ? छलफल गरी निष्कर्ष पत्ता लगाउनुहोस् ।

उदाहरण 3

X – अक्षसँग समानान्तर हुने र निम्न बिन्दुहरूबाट जाने सिधा रेखाको समीकरण पत्ता लगाउनुहोस् ।

(i) (5, 6) (ii) (-4, -4)

समाधान

(i) सिधारेखाको समीकरण y = b (मानौँ)

यो रेखा बिन्दु (5, 6) बाट जाने भएकाले b = 6 हुन्छ ।

$\therefore$ चाहिएको रेखाको समीकरण y = 6

अर्थात y – 6 = 0 हुन्छ ।

(ii) सिधारेखाको समीकरण y =b (मानौँ)

यो रेखा बिन्दु (-4, -4) बाट जाने भएकाले,

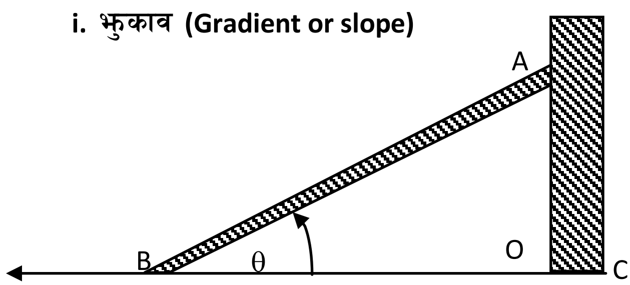
b = -4

$\therefore$ चाहिएको रेखाको समीकरण y = -4

अर्थात y + 4 = 0 हुन्छ ।

(ख) **झुकाव खण्ड रूप (Slope Intercept Form)**

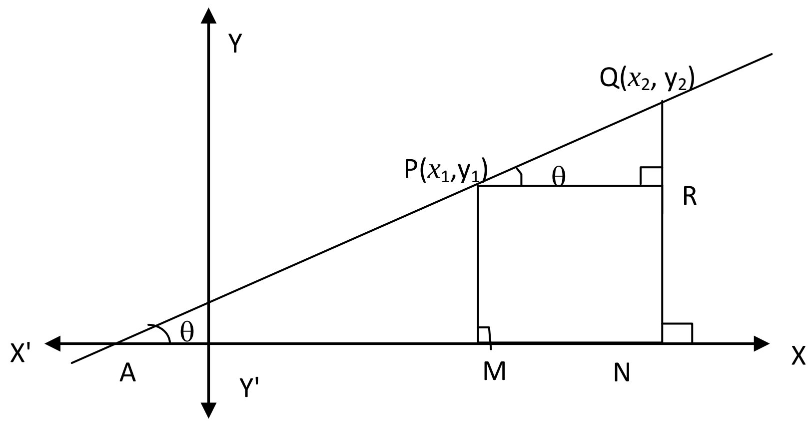
i. झुकाव (Gradient or slope)



तपाईंहरूले आफ्नो घरमा भऱ्याङ राखेको देख्नुभएको छ ? भऱ्याङलाई कसरी राखिएको हुन्छ ? अवलोकन र विश्लेषण गर्नुहोस् ।

भऱ्याङलाई भित्तामा आड लगाएर ढल्काएर अथवा झुकाएर राखेको हुनुपर्छ । त्यसरी झुकाएर राख्दा भऱ्याङलाई कति झुकाउने वा कति ढल्काएर राख्ने भन्ने तथ्यलाई नै भऱ्याङको जमिनसँगको झुकाव भनिन्छ ।

ii. दुई बिन्दुहरू (x_1, y_1) र (x_2, y_2) जोड्ने रेखाको झुकाव



मानौं बिन्दुहरू P(x_1, y_1) र Q(x_2, y_2) भएर जाने रेखा PQ ले x – अक्षलाई बिन्दु A मा काटेको छ र धनात्मक दिशामा $\angle PAX = \theta$ कोण बनाएको छ ।

चित्रमा $PM \perp OX$, $QN \perp OX$ र $PR \perp QN$ (खिचौं)

तब, $PR = MN = ON - OM = x_2 - x_1$ र

$QR = QN - RN = QN - PM = y_2 - y_1$ हुन्छ ।

$\angle QPR = \angle PAX = \theta$ हुन्छ ।

अब समकोणी ΔPRQ मा $\tan\theta = \frac{p}{b}$

अथवा, $\tan\theta = \frac{QR}{PR}$

अथवा, $\tan\theta = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

अत: रेखा PQ को झुकाव (m) = $\tan\theta = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ हुन्छ ।

एउटा सिधा रेखाको झुकाव (slope or gradient) उक्त रेखाले x – अक्षसँग धनात्मक दिशामा बनाएको कोणको tangent हुन्छ । यसलाई m वा $\tan\theta$ द्वारा जनाइन्छ । दुई ओटा बिन्दुहरू A(x_1, y_1) र B(x_2, y_2) जोड्ने रेखाका झुकाव (m) = $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ हुन्छ ।

उदाहरण 4

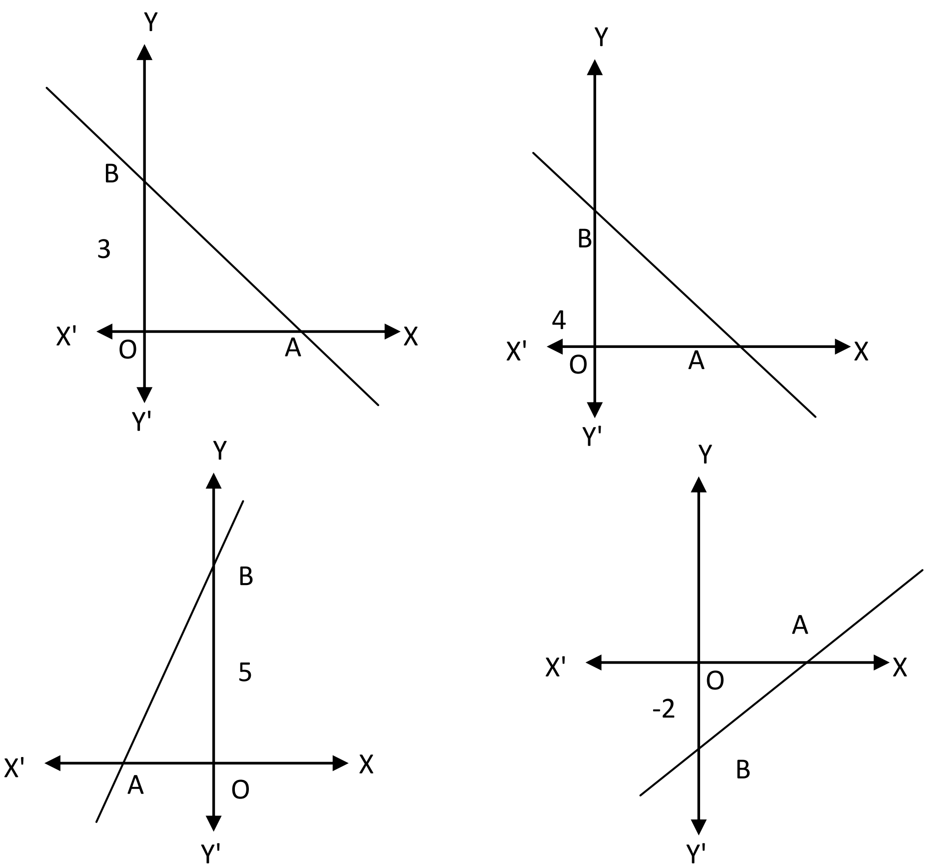
बिन्दुहरू (4, 5) र (6, 7) जोड्ने रेखाको झुकाव पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान

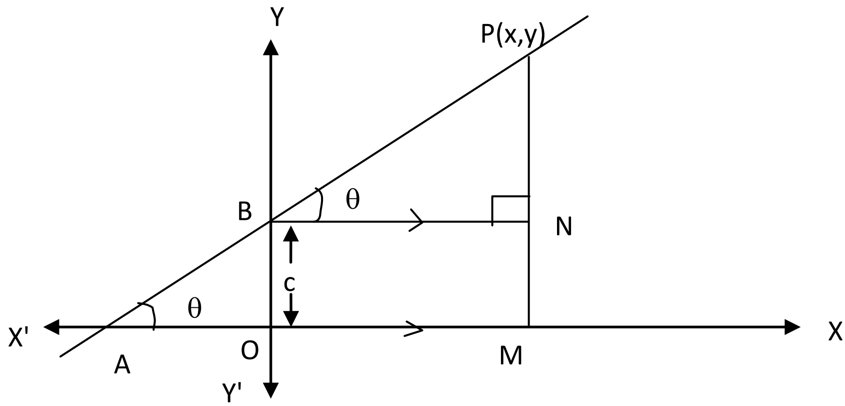
यहाँ, $(x_1, y_1) = (4, 5)$ र $(x_2, y_2) = (6, 7)$

अत: झुकाव (m) = $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \frac{7-5}{6-4} = \frac{2}{2} = 1$

ii. y-खण्ड (y- intercept)



दिइएका चित्रहरूमा रेखा AB ले y- अक्षलाई बिन्दु B मा काटेको छ र उद्गम बिन्दु O देखि B सम्मको दुरी क्रमश: 3, 4, 5 र -2 छन् । यी दुरीलाई नै रेखाको y- खण्ड (y- intertcept) भनिन्छ र सामान्यतया यसलाई c ले जनाइन्छ ।



माथिका चित्रमा सरल रेखा AB ले x – अक्षसँग धनात्मक दिशामा बनाएको कोण $\angle BAX = \theta$ छ। यसको y- खण्ड OB = c छ। यसमा पर्ने कुनै बिन्दु P(x, y) बाट $PM \perp OX$ खिचौँ। $BN \perp PM$ खिचौँ। $\angle PBN = \angle BAX = \theta$ हुन्छ।

समकोणी त्रिभुज ΔPNB मा,

$\tan\theta = \frac{p}{b}$

अथवा, $m = \frac{PN}{BN}$

अथवा, $m = \frac{PM - NM}{OM}$

अथवा, $m = \frac{PM - 0B}{OM}$

अथवा, $m = \frac{y - c}{x}$

अथवा, $y - c = mx$

अथवा, $y = mx + c$

(i) यदि रेखा AB उद्गम बिन्दुबाट जान्छ भने c = 0 हुन्छ र यसको समीकरण $y = mx + 0$

अथवा, $y = mx$ हुन्छ।

(ii) रेखा AB, x - अक्षसँग समानान्तर भएमा,

$m = \tan 0° = 0$ हुन्छ र

रेखाको समीकरण $y = mx + c$

अथवा, $y = ox + c$

अथवा, $y = c$ हुन्छ।

उदाहरण 4

सरल रेखा $2x - 10y = 8$ **को झुकाव र** y – **खण्ड पत्ता लगाउनुहोस् ।**

समाधान

यहाँ, $2x - 10y = 8$

अथवा, $2x - 8 = 10y$

अथवा, $y = \frac{2x-8}{10}$

अथवा, $y = \frac{2x}{10} - \frac{8}{10}$

अथवा, $y = \frac{2x}{10} - \frac{8}{10}$

अथवा, $y = \frac{1}{5}x - \frac{4}{5}$ **लाई** $y = mx + c$ **सँग तुलना गर्दा,**

झुकाव $(m) = \frac{1}{5}$ **र**

y –**खण्ड**$(c) = \frac{-4}{5}$

उदाहरण 5

y –**खण्ड** 3 **हुने गरी** y- **अक्षलाई काट्ने र** x – **अक्षसँग** $60°$ **को कोण बनाउने सरल रेखाको समीकरण पत्ता लगाउनुहोस् ।**

समाधान

यहाँ, y – **खण्ड**$(c) = 3$

झुकाव $(m) = \tan\theta = \tan 60° = \sqrt{3}$

अब, सरल रेखाको समीकरण $y = mx + c$

अथवा, $y = \sqrt{3}x + 3$

अथवा, $\sqrt{3}x - y + 3 = 0$

अभ्यास 4.3 (A)

1. (a) सिधारेखाको झुकाव भनेको के हो ?
   (b) सिधारेखाको y – खण्ड कसरी निकालिन्छ ?
   (c) सिधारेखाको समीकरण झुकाव खण्ड रूपमा लेख्नुहोस् ।

2. y- अक्षसँग समानान्तर हुने र निम्न लिखित बिन्दुबाट जाने सरल रेखाको समीकरण निकाल्नुहोस् :

   (a) (2, 3) (b) (5, -2) (c) (-4, 5)

3. x – अक्षसँग समानान्तर हुने र निम्न लिखित बिन्दुबाट जाने सरल रेखाको समीकरण पत्ता लगाउनुहोस् :

   (a) (-3, 2) (b) (3, -4) (c) (3, 6)

4. y- अक्षदेखि निम्न लिखित दुरीमा रही y – अक्षसँग समानान्तर हुने रेखाहरूका समीकरण पत्ता लगाउनुहोस् :

   (a) 3 (b) -7 (c) $\frac{5}{6}$

5. x – अक्षदेखि निम्न लिखित दुरीमा रही x – अक्षसँग समानान्तर हुने रेखाहरूको समीकरणपत्ता लगाउनुहोस् ।

   (a) 3 (b) $\frac{3}{4}$ (c) $\frac{2}{3}$

6. तलका तालिकामा झुकाव र y – खण्ड भर्नुहोस् :

	समीकरण	झुकाव	y – खण्ड
(a)	y =3x +2		
(b)	y = 5x -2		
(c)	y =-2x +4		
(d)	y = 12x		
(e)	y =$\frac{1}{2}x - \frac{2}{3}$		
(f)	2y -10x = 8		
(g)	x +y +1 = 0		
(h)	x – y = 5		
(i)	5y = 5x +3		
(j)	y =$\sqrt{3}x$		

7. निम्न लिखित अवस्थामा सरल रेखाको समीकरण पत्ता लगाउनुहोस् :

   झुकाव = 5, y – खण्ड = 3

   झुकाव = -2, y – खण्ड = -1

भुकाव = 3, उद्गम बिन्दु भएर जाने

भुकाव = $\frac{1}{3}$ र बिन्दु (0, 1) भएर जाने

भुकाव = $\frac{-3}{4}$ र y – खण्डमा = $\frac{1}{2}$

Y – खण्ड = -3 र भुकाव (m) = tan 30°

Y – खण्ड = -5 र भुकाव (m) = tan 60°

Y – खण्ड = 3 र भुकाव (m) = tan (-60°)

Y – खण्ड = 7 र भुकाव (m) = tan 120°

उद्गम बिन्दु भएर जाने र x – अक्षसँग 45° को कोण बनाउने

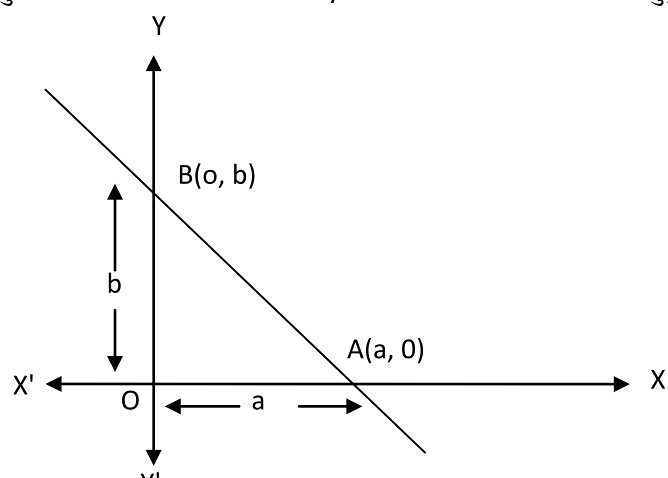
उद्गम बिन्दु भएर जाने र x – अक्षसँग 60° को कोण बनाउने

उद्गम बिन्दु भएर जाने र x – अक्षसँग 120° को कोण बनाउने

उद्गम बिन्दु भएर जाने र x – अक्षसँग 150° को कोण बनाउने

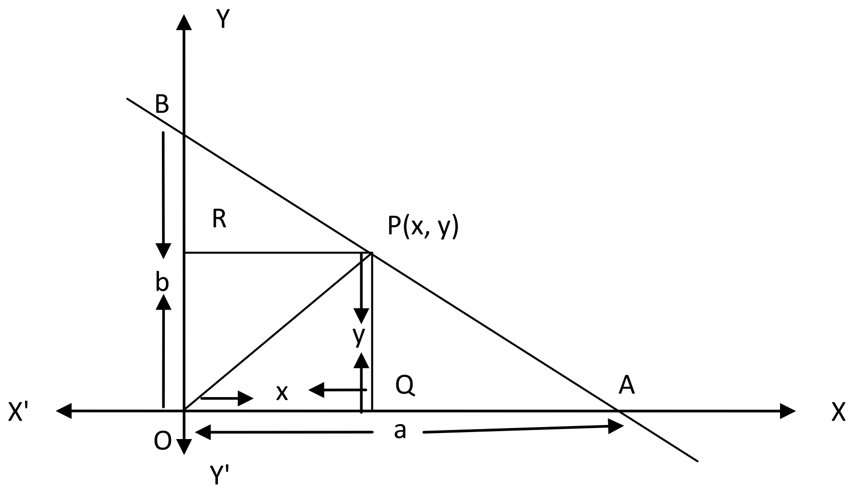
(c) खण्ड रूप (Intercepts from)

कुनै सरल रेखाको x – खण्ड र y – खण्ड कसरी पत्ता लगाउनुहुन्छ ? छलफल गर्नुहोस् ।



माथिको चित्रमा सरल रेखा AB ले x – अक्षको बिन्दु A(a, 0) र y – अक्षको बिन्दु B(0, b) मा काटेको छ । अर्थात OA = a र OB = b छ । यी भागहरूलाई क्रमशः x खण्ड र y – खण्ड भनिन्छ ।

कुनै रेखाले x – अक्षमा काटेको बिन्दुदेखि उद्गम बिन्दुसम्मको भागलाई x – खण्ड (a) भनिन्छ । त्यस्तै कुनै रेखाले y – अक्षमा काटेको बिन्दुदेखि उद्गम बिन्दुसम्मको दुरीलाई y–खण्ड (b) भनिन्छ ।



माथिको चित्रमा सरल रेखा AB ले x – अक्षको बिन्दु A र y अक्षको बिन्दु B मा काटेको छ । अत: OA = a र OB = b छ ।

AB मा पर्ने कुनै बिन्दु P(x, y) बाट PQ⊥OX र PR⊥OY खिचौं र OP जोडौं ।

चित्रमा, PQ = y र PR = QO = x छ ।

अब, ΔBOA को क्षेत्रफल= ΔPBO को क्षेत्रफल + ΔPOA को क्षेत्रफल

अथवा, $\frac{1}{2}\mathrm{OA.OB} = \frac{1}{2}\mathrm{OB.PR} + \frac{1}{2}\mathrm{OA.PQ}$

अथवा, OA.OB = OB.PR + OA.PQ

अथवा, a. b = b. x + a. y

अथवा, 1 = $\frac{bx+ay}{ab}$

अथवा, bx + ay = ab

अथवा, $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$

यही रेखा AB को समीकरण हो ।

उदाहरण 1

सरल रेखा 3x + 4y = 24, का X- खण्ड र Y– खण्ड पत्ता लगाउनुहोस्:

समाधान

यहाँ, $3x + 4y = 24$

अथवा, $\frac{3x+4y}{24} = \frac{24}{24}$

अथवा, $\frac{3x}{24} + \frac{4y}{24} = 1$

अथवा, $\frac{x}{8} + \frac{y}{6} = 1$ लाई $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ सँग तुलना गर्दा,

x – खण्ड (a) = 8 र y – खण्ड (b) = 6

उदाहरण 2

x – खण्ड = 3 र y – खण्ड = -4 भएको सरल रेखाको समीकरण पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान

यहाँ, x –खण्ड (a) = 3

y –खण्ड (b) = -4

रेखाको समीकरण $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$

अथवा, $\frac{x}{3} + \frac{y}{-4} = 1$

अथवा, $\frac{x}{3} - \frac{y}{4} = 1$

अथवा, $\frac{4x-3y}{12} = 1$

अथवा, $4x – 3y = 12$

अथवा, $4x – 3y - 12 = 0$

उदाहरण 3

अक्षहरूमा बराबर परिमाण तर विपरीत चिह्नका खण्डहरू बनाउने र बिन्दु (3, -4) भएर जाने सरल रेखाको समीकरण पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान

यहाँ, x खण्ड (a) = a भए, y-खण्ड (b) = - a हुन्छ ।

अब, रेखाको समीकरण $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$

अथवा, $\frac{x}{a}+\frac{y}{-a}=1$

अथवा, $\frac{x}{a}-\frac{y}{a}=1$

अथवा, $x - y = a$ - - (i)

फेरि समीकरण (i) बिन्दु (3, -4) भएर जाने भएकाले $3-(-4) = a$

अथवा, $3 + 4 = a$

अथवा, $a = 7$

फेरि, a को मान समीकरण (i) मा राख्दा, $x - y = a$

अथवा, $x - y = 7$

अथवा, $x - y - 7 = 0$

अभ्यास 4.2 (B)

1. (a) सरल रेखाको x – खण्ड भनेको के हो ?

   (b) खण्ड स्वरूपअनुसार सिधा रेखाको समीकरण लेख्नुहोस् ।

2. तलका समीकरणहरूले दिने रेखाको x – खण्ड र y – खण्ड पत्ता लगाउनुहोस् :

   (a) $4x - 3y - 12 = 0$ (b) $5x + 3y + 15 = 0$ (c) $8x - 5y + 60 = 0$

   (d) $9x + 2y - 30 = 0$ (e) $2x + y - 1 = 0$

3. निम्न लिखित अवस्थामा सरल रेखाको समीकरण पत्ता लगाउनुहोस् :

   (a) x – खण्ड = 3 र y- खण्ड = -4 (b) x – खण्ड = -3 र y- खण्ड = 4

   (c) x – खण्ड = 5 र y- खण्ड = 10 (d) x – खण्ड = -2 र y- खण्ड = 3

   (e) x – खण्ड = -2 र y- खण्ड = -3 (f) x – खण्ड = $\frac{3}{5}$ र y- खण्ड = $\frac{9}{2}$

4. निम्न लिखित अवस्थामा सरल रेखाको समीकरण पत्ता लगाउनुहोस् :

   (a) बिन्दु (5, 6) भएर जाने र अक्षहरूमा बराबर खण्डहरू बनाउने

   (b) बिन्दु (2, -1) भएर जाने र अक्षहरूमा बराबर खण्डहरू बनाउने

(c) बिन्दु (3, 4) भएर जाने र अक्षहरूमा बराबर खण्डहरू बनाउने

(d) बिन्दु (2, 6) भएर जाने र अक्षहरूमा बराबर खण्डहरू बनाउने

(e) अक्षहरूमा बराबर परिमाण तर विपरीत चिह्नका खण्डहरू बनाउने र बिन्दु (2, 3) भएर जाने

(f) अक्षहरूमा बराबर परिमाण तर विपरीत चिह्नका खण्डहरू बनाउने र बिन्दु (4, -5) भएर जाने

(g) अक्षहरूमा बराबर परिमाण तर विपरीत चिह्नका खण्डहरू बनाउने र बिन्दु (6, -5) भएर जाने

(h) अक्षहरूमा बराबर परिमाण तर विपरीत चिह्नका खण्डहरू बनाउने र बिन्दु (3, 4) भएर जाने

(i) y- खण्ड भन्दा x – खण्ड दोब्बर हुनेगरी अक्षहरूलाई काट्ने र बिन्दु (3. 2) भएर जाने

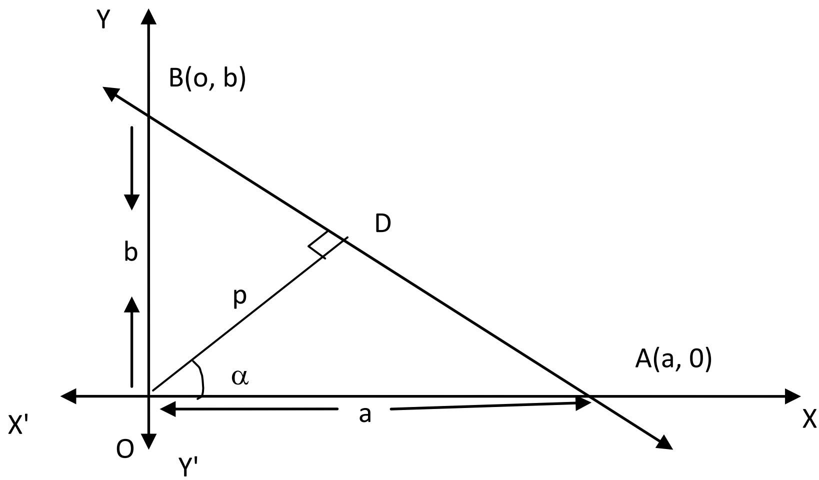
(j) बिन्दु (3, 4) भएर जाने र x – खण्ड र y – खण्डको योग 15 हुने

5. (a) कुनै रेखाको x र y – अक्षहरूभित्र परेको अंशलाई बिन्दु (3, -2) ले समद्विभाजन गर्दछ भने सरल रेखाको समीकरण पत्ता लगाउनुहोस् ।

(b) बिन्दु (2, 3) ले कुनै रेखाका अक्षहरू बिचको अंशलाई समद्विभाजन गर्दछ भने सो रेखाको समीकरण पत्ता लगाउनुहोस् ।

(c) बिन्दु (2, 3) ले कुनै रेखाका अक्षहरू बिचको अंशलाई 3:4 को अनुपातमा विभाजन गर्छ भने सो रेखाको समीकरण पत्ता लगाउनुहोस् ।

(घ) **लम्बरूप (Normal or Perpendicular Form)**



दिइएको चित्रमा सरल रेखा AB ले x- अक्षको बिन्दु A र y- अक्षको बिन्दु B मा काटेको छ, OD⊥AB खिचिएको छ जहाँ OD = p र ∠DOA= α छ । समकोणी ΔODB मा ∠BOD = 90°-α हुन्छ र ∠OBD = (180° - α) - 90° हुन्छ । OA = a र OB = b मानौं,

तब, $\sin\alpha = \frac{OD}{OB}$

अथवा, $\sin\alpha = \frac{p}{b}$

$\therefore\ b = \frac{p}{\sin\alpha}$

र समकोणी ΔODA मा, $\cos\alpha = \frac{OD}{OA}$

अथवा, $\cos\alpha = \frac{p}{\alpha}$

$\therefore\ a = \frac{p}{\cos\alpha}$

अब, खण्डरूपबाट AB को समीकरण, $\frac{x}{a} + \frac{x}{b} = 1$

अथवा, $\frac{x}{\frac{p}{cos\alpha}} + \frac{y}{\frac{p}{sin\alpha}} = 1$

अथवा, $\frac{xcos\alpha}{p} + \frac{ysin\alpha}{p} = 1$

$\therefore\ \boxed{xcos\alpha + ysin\alpha\ = p}$

(ङ) **दिइएका समीकरणलाई प्रमाणिक रूपमा रूपान्तरण (Reduction of the given equation in the standard forms)**

मानौं x, y चलराशि र a, b, c अचलराशि भए x र y लाई प्रथम डिग्रीमा व्यक्त गरिएको रेखाको साधारण समीकरण (general equation of first degree), ax +by + c = 0 हुन्छ । यो सरल रेखाको समीकरणको साधारण स्वरूप हो । यो समीकरणलाई झुकाव खण्ड, खण्डरूप र लम्ब रूपमा निम्नअनुसार रूपान्तर गर्न सकिन्छ :

i. झुकाव खण्ड रूपमा रूपान्तरण

यहाँ, समीकरण $ax + by + c = 0$

अथवा, $by = -ax - c$

अथवा, $y = \frac{-a}{b}x - \frac{c}{b}$ लाई $y = mx + c$ सँग तुलना गर्दा,

झुकाव (m) = $\frac{-a}{b} = \frac{\text{-x को गुणाङ्क}}{\text{y को गुणाङ्क}}$

y – खण्ड (c) = $\frac{\text{– अचलराशि}}{\text{y को गुणाङ्क}}$

ii. खण्डरूपमा रूपान्तरण

यहाँ, $ax + by + c = 0$

अथवा, $ax + by = -c$

अथवा, $\frac{ax-by}{-c} = 1$

अथवा, $\frac{x}{-\frac{c}{a}} + \frac{y}{-\frac{c}{b}} = 1$ लाई $\frac{x}{A} + \frac{y}{B} = 1$ सँग तुलना गर्दा

x- खण्ड (A) = $\frac{-c}{a} = \frac{\text{- अचलराशि}}{\text{x को गुणाङ्क}}$

र

y - खण्ड (B) = $\frac{-c}{b} = \frac{y \text{ को गुणाङ्क}}{\text{- अचलराशि}}$

iii. लम्बरूपमा रूपान्तरण

यहाँ, समीकरण $ax + by + c = 0$ लाई k ले दुवैतिर गुणन गर्दा $k(ax + by + c) = 0$,

k को कुनै निश्चित मान भएको अवस्थामा यो समीकरण लम्बरूपको समीकरण

$x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0$ सर्वाङ्ग रूपले बराबर (identically equal) हुन्छन् भनी मानौं ।

अर्थात् $x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = k(ax + by + c)$ - - - (i)

अथवा, $x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = xka + yk\,b + kc$

अथवा, $k(ax+by + c) = 0$ र $x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0$ लाई

एक एक बराबर (identical) मान्दा,

$\therefore \cos\alpha = k\,a$ .... (ii)

$\sin\alpha = k\,b$ .... (iii)

अब, समीकरण (ii) र (iii) लाई वर्ग गरी जोड्दा,

$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = k^2 (a^2 + b^2)$

अथवा, $1 = k^2 (a^2 + b^2)$

अथवा, $k^2 = \frac{1}{a^2+b^2}$

$\therefore k = \pm \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}$

k को मान (i) मा प्रतिस्थापन गर्दा

$x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = \frac{\pm 1}{\sqrt{a^2+b^2}}(ax + by + c)$

अथवा, $x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = \frac{ax}{\pm\sqrt{a^2+b^2}} + \frac{by}{\pm\sqrt{a^2+b^2}} + \frac{c}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}$

तुलना गर्दा, $\cos\alpha = \frac{a}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}$, $\sin\alpha = \frac{b}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}$ र $P = \frac{c}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}$

यहाँ p लम्बको दुरी भएकाले यसको मान धनात्मक हुने गरी + अथवा - चिह्न लिनुपर्छ ।

उदाहरण 1

उद्गम बिन्दुदेखि कुनै रेखासम्मको दुरी 4 एकाइ छ र सो लम्बले x – अक्षसँग 60° कोण बनाएको छ भने रेखाको समीकरण पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान

यहाँ, लम्बदुरी (p) = 4, कोण (α) = 60°

अब, लम्बरूपबाट, $x\cos\alpha + y\sin\alpha = p$

अथवा, $x.\cos 60° + y.\sin 60° = 4$

अथवा, $x.\cos60° + y.\sin60° = 4$

अथवा, $x.\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{y} = 4$

अथवा, $\frac{x+\sqrt{3}\mathrm{y}}{2} = 4$

अथवा, $x + \sqrt{3}\mathrm{y} = 8$

अथवा, $x +\sqrt{3}\mathrm{y} = 8$

$\therefore x +\sqrt{3}\mathrm{y} - 8 = 0$ आवश्यक समीकरण हो ।

उदाहरण 2

समीकरण $\sqrt{3}x - y + 2 = 0$ लाई लम्बरूपमा रूपान्तरण गर्नुहोस् ।

समाधान

यहाँ $\sqrt{3}x - y + 2 = 0$

अथवा, $\frac{\sqrt{3}}{-\sqrt{(\sqrt{3})^2+(-1)^2}}x - \frac{1}{-\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2+(-1)^2}}\mathrm{y} + \frac{2}{-\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2+(-1)^2}} = 0$

अथवा, $\frac{-\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y - \frac{2}{2} = 0$

अथवा, $\frac{-\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y \ = 1$

यो समीकरणलाई $x\cos\alpha + y\sin\alpha = P$ सँग तुलना गर्दा,

अथवा, $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ अथवा, $\cos\alpha = \cos 150°$

अथवा, $\sin\alpha = \frac{1}{2}$ अथवा, $\sin\alpha = \sin 150°$ र $p = 1$

अत: लम्बरूपको आवश्यक समीकरण

$x\cos150° + y\sin150° = 1$ हुन्छ ।

अभ्यास 4.3 (C)

1. (a) सरल रेखाको समीकरण लम्बरूपमा लेख्नुहोस् ।

   (b) सिधारेखाको समीकरणका तिन प्रमाणिक रूपहरू के के हुन् ? ती रूपमा समीकरणहरू के के हुन्छन्, लेख्नुहोस् ।

2. निम्न लिखित अवस्थामा सरल रेखाको समीकरण पत्ता लगाउनुहोस् :

   (a) P =1 एकाइ α = -60° (b) P = 4 एकाइ α = 30°

   (c) P =2 एकाइ α = 90° (d) P = 4 एकाइ α = 120°

   (e) P =2 एकाइ α = 150° (f) P =9 एकाइ α = 60°

   (g) P = 3 एकाइ α = 120° (h) P = 13 एकाइ α = 45°

   (i) P = $\frac{5}{7}$ एकाइ α = 135° (j) P = $\sqrt{8}$ एकाइ α = 150°

जहाँ P उद्गम बिन्दुबाट रेखासम्मको लम्बदुरी र α लम्बले x – अक्षसँग बनाएको कोण हो ।

3. निम्न लिखित समीकरणहरूलाई लम्बरूपमा रूपान्तरण गर्नुहोस् :

   (a) $2x - 3y = 5$ (b) $x = y - 2\sqrt{2}$ (c) $x - y + 4 = 0$

   (d) $3x + 4y = 15$ (e) $x + \sqrt{3}y = -4$ (f) $x - y = 5$

   (g) $5x = 12y + 13$ (h) $x = y$ (i) $\sqrt{3}x - 7y = 5$

   (j) $\frac{x}{\sqrt{3}} + y = 4$

4. निम्न लिखित समीकरणहरूलाई झुकाव खण्डरूप र खण्डरूपमा रूपान्तरण गर्नुहोस् :

   (a) $\sqrt{3}x + 2y = 7$ (b) $x - y = 6$ (c) $x - y = \frac{1}{5}$

   (d) $3x - 2y + 8 = 0$ (e) $3x - 4y = 8$ (f) $5x + 6y = -1$

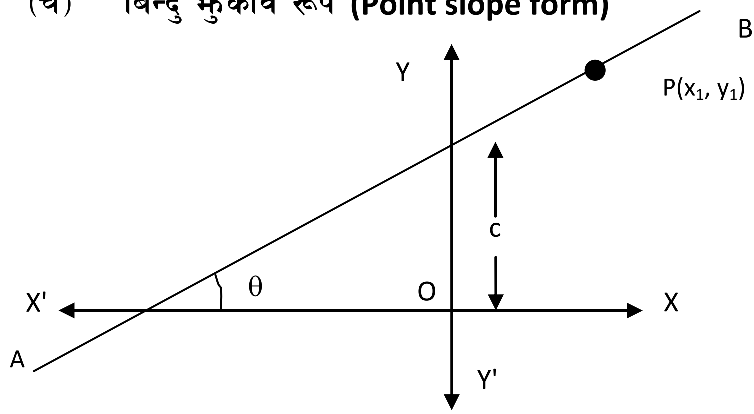
5. निम्न कार्यहरू गरी एउटा प्रतिवेदन बनाएर कक्षामा प्रस्तुत गर्नुहोस् :

   i. सिधारेखाका 5 ओटा समीकरणहरू लेख्नुहोस् ।

   ii. उक्त प्रत्येकको ग्राफ खिच्नुहोस् ।

   iii. उक्त प्रत्येक समीकरणहरूलाई तिन ओटा प्रमाणिक रूपमा बदल्नुहोस् ।

(च) **बिन्दु झुकाव रूप (Point slope form)**



माथिको चित्रमा सरल रेखा AB को झुकाव (m) = tanθ छ र y – खण्ड c छ । झुकाव खण्डरूपबाट AB को समीकरण

$y = mx + c$ - - - (i) हुन्छ ।

यदि यो रेखा $P(x_1, y_1)$ भएर जान्छ भने

$y_1 = mx_1 + c$

अथवा, $c = y_1 - mx_1$ -- - (ii) हुन्छ ।

समीकरण (ii) बाट c को मान समीकरण (i) मा राख्दा,

$y = mx + y_1 - mx_1$

$\therefore y - y_1 = m(x - x_1)$ लाई बिन्दु झुकाव रूपको समीकरण भनिन्छ ।

यदि माथिको रेखा उद्गम बिन्दु भएर जान्छ भने समीकरण के हुन्छ ? पत्ता लगाउनुहोस् ।

उदाहरण 1

X– अक्षसँग 30° को कोण बनाउने र बिन्दु (2, -2) भएर जाने रेखाको समीकरण पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान

यहाँ, झुकाव (m)= tan30° = $\frac{1}{\sqrt{3}}$

बिन्दु $(x_1, y_1) = (2, -2)$

अब, बिन्दु झुकाव रूपबाट, $(y - y_1) = m(x - x_1)$

अथवा, $y-(-2) = \frac{1}{\sqrt{3}}(x - 2)$

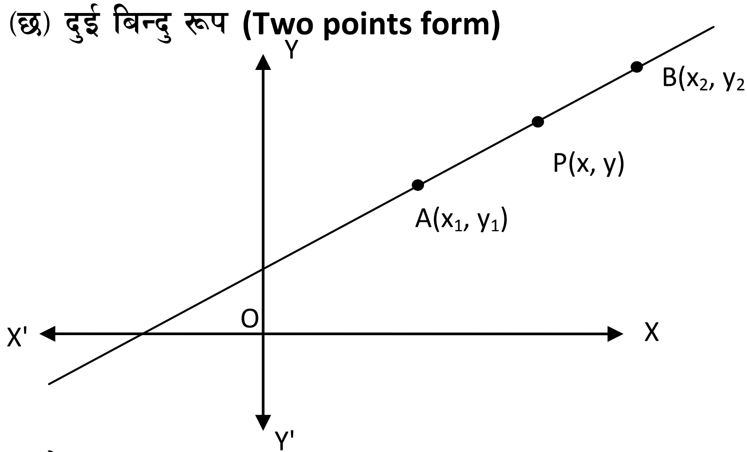
अथवा, $(x - 2) = \sqrt{3}(y + 2)$

अथवा, $x - 2 = \sqrt{3}y + 2\sqrt{3}$

अथवा, $x - \sqrt{3}y - 2 - 2\sqrt{3} = 0$

$\therefore\ x - \sqrt{3}y - 2(1 + \sqrt{3}) = 0$ जुन रेखाको आवश्यक समीकरण हो ।

(छ) दुई बिन्दु रूप (Two points form)



मानौँ, सरल रेखा AB बिन्दुहरू $A(x_1, y_1)$ र $B(x_2, y_2)$ भएर जान्छ । AB मा कुनै अर्को बिन्दु P(x, y) पनि पर्छ । तब AB रेखाको झुकाव (m) $= \frac{y_2-y_1}{x_2-x_2}$ हुन्छ ।

अब, झुकाव (m) $= \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ र बिन्दु (x_1, y_1) लिएर बिन्दु झुकाव रूपअनुसार रेखा AB को समीकरण

$$y - y_1 = \mathrm{m}(x - x_1)$$

$$\therefore\ y - y_1 = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x - x_1)$$

यो समीकरणलाई $\frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{x-x_1}{x_2-x_1}$ को रूपमा पनि लेखिन्छ ।

उदाहरण 2

बिन्दुहरू (4, 3) र (2, -3) जोड्ने सरल रेखाको समीकरण पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान

यहाँ, $(x_1, y_1) = (4, 3)$ र $(x_2, y_2) = (2, -3)$

अब, दुई बिन्दु रूपबाट,

$$y - y_1 = \frac{\boldsymbol{y_2-y_1}}{\boldsymbol{x_2-x_1}}(\boldsymbol{x - x_1})$$

अथवा, $y - 3 = \frac{-3-3}{2-4}(x - 4)$

अथवा, $y - 3 = \frac{-6}{-2}(x - 4)$

अथवा, $y - 3 = 3(x - 4)$

अथवा, $y - 3 = 3x - 12$

अथवा, $3x - y = 9$

$\therefore\ 3x - y - 9 = 0$

यसरी कुनै तिन ओटा बिन्दुहरू एउटै रेखामा पर्छन् भने त्यस्ता बिन्दुहरूलाई समरेखीय (collinear) भनिन्छ ।

उदाहरण 3

बिन्दुहरू (1, -4), (2, 5) र (3, 14) समरेखीय बिन्दुहरू हुन् भनी प्रमाणित गर्नुहोस् ।

समाधान

यहाँ, $(x_1, y_1) = (1, 4)$ र $(x_2, y_2) = (2, 5)$

अब, दुई बिन्दुरूपबाट

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

अथवा, $y - (-4) = \frac{5-(-4)}{2-1}(x - 1)$

अथवा, $y + 4 = 9(x - 1)$

अथवा, $9x - y - 9 - 4 = 0$

अथवा, $9x - y - 13 = 0$ - - - - (i)

बाँकी बिन्दु $(x, y) = (3, 14)$ समीकरण (i) मा राख्दा,

$$9 \times 3 - 14 - 13 = 0$$

अथवा, 27 - 27, = 0

अथवा, 0 = 0

अत : दिइएका बिन्दुहरू समरेखीय बिन्दुहरू हुन् ।

अभ्यास 4. 3 (D)

(a) सरल रेखाको समीकरण बिन्दु झुकाव रूपमा के हुन्छ, लेख्नुहोस् ।

(b) दुई बिन्दुरूपको सरल रेखाको समीकरण लेख्नुहोस् ।

2. तलका सरल रेखाका समीकरणहरू पत्ता लगाउनुहोस् :

(a) x – अक्षसँग 135° कोण बनाउने र बिन्दु (1, -2) भएर जाने

(b) x – अक्षसँग 60° कोण बनाउने र बिन्दु (2, -2) भएर जाने

(c) x – अक्षसँग 45° कोण बनाउने र बिन्दु (2, 1) भएर जाने

(d) x – अक्षसँग 30° कोण बनाउने र बिन्दु (1, 3) भएर जाने

(e) x – अक्षसँग 150° कोण बनाउने र बिन्दु (4, 5) भएर जाने

(f) x – अक्षसँग $\tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)$ कोण बनाउने र बिन्दु (1, 2) भएर जाने

3. दिइएका बिन्दुहरू भएर जाने सरल रेखाको समीकरण पत्ता लगाउनुहोस् :

(a) (2, -3) र (-4, 4)　　(b) (-2, 0) र (0, 4)　　(c) (0, 2) र (1, 0)

(d) (3, 4) र (4, 3)　　(e) (2, -3) र (-4, 9)　　(f) (3, 4) र (5, 6)

(g) (-1, 3) र (6, -7) (h) (0_1, -a) र (b, 0) (i) (a, 0) र (0, b)

(j) (a,b) र (a + b, a-b)

4. **निम्न लिखित तिन बिन्दुहरू समरेखीय (collinear) हुन् भनी प्रमाणित गर्नुहोस् :**

(a) (2, 0), (0, 3) र (6,-6) (b) (-3, 0), (0, -6) र (-1, -4)

(c) (-5, 3), (-10, 6) र (5, -3) (d) (1, 4), (3, -2) र (-3, 16)

(e) (3a, 0), (0, 3b) र (a, 2b) (f) (a, b + c), (b, c + a) र (c, a + b)

5. **तलका तिन बिन्दुहरू समरेखीय छन् भने, P को मान पत्ता लगाउनुहोस् :**

(a) (-2, 1), (p, 3) र (2, 5) (b) (4, -2), (1, 2) र (-2, p)

(c) (5, 1) (1, -1) र (11, p)

6. (a) **शीर्षबिन्दुहरू (1, 4), (2, -3) र (-1, -2) भएको त्रिभुजका भुजाहरूको समीकरण पत्ता लगाउनुहोस् ।**

(b) **शीर्षबिन्दुहरू (1, 0), (0, 1) र (2, 3) भएको त्रिभुजका तिन ओटा मध्यिकाहरूको समीकरण पत्ता लगाउनुहोस् ।**

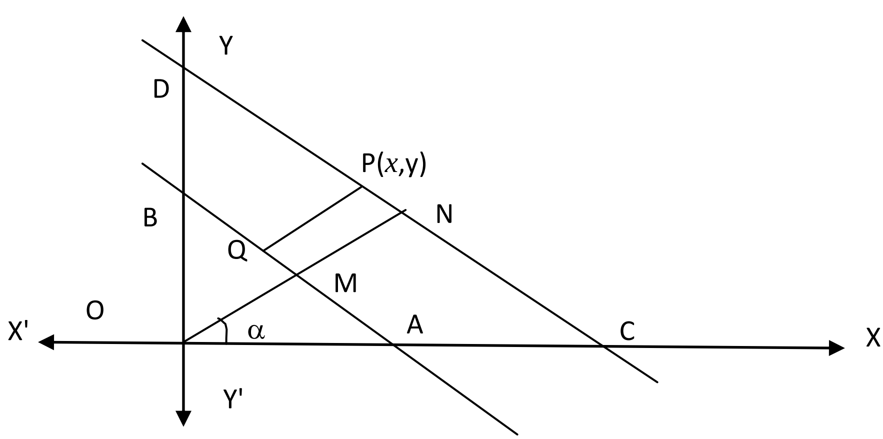
(c) **शीर्षबिन्दुहरू (2, 2), (2, 8) र (-6, 2) भएको त्रिभुजमा शीर्षबिन्दु (2, 2) बाट खिचेको माध्यिकाको समीकरण पत्ता लगाउनुहोस् ।**

(d) **बिन्दुहरू (-1, 3), (1, -1) र (5, 1) त्रिभुजका शीर्षबिन्दुहरू छन् भने (-1, 3) बाट खिचिएको मध्यिकाको लम्बाइ र समीकरण पत्ता लगाउनुहोस् ।**

4.4 कुनै बिन्दु र सरल रेखाबिचको दुरी (Perpendicular Distance from a Point to a Line)

कुनै बिन्दुदेखिको कुनै सरल रेखासम्मको दुरी कसरी पत्ता लगाउन सकिन्छ ? छलफल गर्नुहोस् ।

(क) बिन्दु **(x_1, y_1)** र रेखा **$x\cos\alpha + y\sin\alpha = p$** सम्मको दुरी



माथिको चित्रमा रेखा AB लाई $x\cos\alpha + y\sin\alpha = p$ ले जनाउँछ र $P(x_1, y_1)$ बाट जाने रेखा CD छ । यदि AB∥CD भए उद्‌गम बिन्दुबाट खिचिएका लम्बहरू OM र ON ले x – अक्षमा उही कोण α बनाउँछन् । यहाँ, OM = P छ । CD को बिन्दु P बाट AB मा PQ लम्ब खिचौं ।

अब, रेखा CD ले उद्‌गम बिन्दुबाट खिचिएको लम्बदुरी $ON = P_1$ र CD ले x – अक्षसँग बनाएको कोण α छ त्यसैले CD को समीकरण $x\cos\alpha + y\sin\alpha = p_1$ हुन्छ ।

यो रेखामा बिन्दु $P(x_1, y_1)$ पर्ने भएकाले,

$x_1 \cos\alpha + y_1\sin\alpha = p_1$ हुन्छ ।

अब, बिन्दु $P(x_1, y_1)$ देखि $x\cos\alpha + y\sin\alpha = p$ सम्मको दुरी,

$PQ = MN = ON - OM = P_1 - p = x_1\cos\alpha + y_1\sin\alpha - p$

(ख) **बिन्दु (x_1, y_1) देखि $ax + by + c = 0$ सम्मको दुरी**

हामीलाई थाहा छ, समीकरण $ax + by + c = 0$ को लम्बरूप (normal form)

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}y + \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} = 0 \text{ हुन्छ ।}$$

अब, बिन्दु (x_1, y_1) देखि $\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}y + \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} = 0$ सम्मको दुरी

$$d = |x_1 cos\alpha + y_1 sin\alpha - p|$$

$$= \left|\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}x_1 + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}y_1 + \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right|$$

$$d = \left|\frac{ax_1+by_1+c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right|$$

माथिको सुत्र प्रयोग गरी दुई ओटा समानान्तर रेखाहरू बिचको दुरी पत्ता लगाउन के गर्नुपर्ला ? छलफल गर्नुहोस् ।

उदाहरण 1

रेखा $3x - 4y + 15 = 0$ र बिन्दु (2, 1) बिचको दुरी पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान

यहाँ, $3x - 4y + 15 = 0$ लाई $ax + by + c = 0$ तुलना गर्दा,

$a = 3, \quad b = -4, \quad c = 15$

र बिन्दु $(x_1, y_1) = (2, 1)$

दुरी (d) = ?

अब, $d = \left|\frac{ax_1+by_1+c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right|$

$= \left|\frac{3\times2+(-4)\times1+15}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}\right|$

$= \frac{17}{5}$ एकाइ

उदाहरण 2

समानान्तर रेखाहरू 4x + 3y = 8 र 4x +3y = 12 बिचको दुरी पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान

यहाँ, 4x + 3y = 8

अथवा, 4x + 3y – 8 = 0 - - - - - (i)

र 4x + 3y = 12

अथवा, 4x + 3y – 12 = 0 - - - - (ii)

रेखा (i) र (ii) बिचको दुरी र रेखा (i) मा पर्ने कुनै बिन्दु र रेखा (ii) बिचको दुरी एउटै हुन्छ । तब, रेखा (i) मा पर्ने बिन्दु लिन सकिन्छ ।

यदि y = 0 लिने हो भने

अथवा, $4x + 3 \times 0 - 8 = 0$

अथवा, $4x = 8$

$x = 2$

बिन्दु $D(x_1, y_1) = (2, 0)$ रेखा (i) मा पर्छ । समीकरण (ii) लाई $ax + by + c = 0$ सँग तुलना गर्दा a = 4, b = 3 र c = -12 हुन्छ ।

अब, $(x_1, y_1) = (2, 0)$ र रेखा (ii) बिचको दुरी

$d = \left|\frac{ax_1+by_1+c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right|$

$= \left|\frac{4\times2+3\times0-12}{\sqrt{4^2+3^2}}\right| = \left|\frac{-4}{5}\right|$

$= \frac{4}{5}$ एकाइ ।

अभ्यास 4.4

1. बिन्दु (m, n) र रेखा ax + by + c = 0 बिचको दुरी कति हुन्छ, लेख्नुहोस् ।

2. निम्न लिखित अवस्थामा दिइएका रेखा र बिन्दु बिचको दुरी निकाल्नुहोस् :

(a) $x - y + 4 = 0; (5, 6)$ (b) $\sqrt{3}x - y + 2 = 0; (2, 4)$

(c) $y - x - 2\sqrt{2} = 0; (-1, 3)$ (d) $3x + 4y = 4; (7, 4)$

(e) $5x - 12y = 0; (-2, 1)$ (f) $4x - 3y + 2 = 0; (2, 4)$

(g) $12x - 5y = 1; (3, 0)$ (h) $4x - 2y + 5 = 0; (0,5)$

(i) $3x - 4y + 15 = 0, (2, 1)$ (j) $(x + y = 2)$ र $(5, 5)$

3. तलका समानान्तर रेखाहरू बिचको दुरी पत्ता लगाउनुहोस् :

(a) $2x + 2y + 10\sqrt{3} = 0$ र $x + y + 3\sqrt{2} = 0$

(b) $3x + 5y - 11 = 0$ र $3x + 5y + 23 = 0$

(c) $6x + 8y + 10 = 0$ र $3y + 4y + 17 = 0$

(d) $3x + 4y - 6 = 0$ र $3x + 4y + 5 = 0$

(e) $3x + 4y - 6 = 0$ र $3x + 4y + 5 = 0$

(f) $12x + 5y = 0$ र $12x + 5y - 26 = 0$

(a) यदि बिन्दु (a, 3) बाट रेखा $3x + 4y + 5 = 0$ सम्मको दुरी 4 एकाइ भए a को मान निकाल्नुहोस् ।

(b) यदि बिन्दु (1, 5) देखि रेखा, $3x - 2y + k = 0$ सम्मको दुरी $\sqrt{13}$ एकाइ भए k को मान निकाल्नुहोस् ।

(c) यदि (-2, m) देखि रेखा $4x - 3y + 10 = 0$ सम्मको दुरी 4 एकाइ भए m को मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

(d) यदि बिन्दु (2, 3) देखि रेखा $Px - 4y + 7 = 0$ सम्मको दुरी 5 एकाइ भए p को मान निकाल्नुहोस् ।

4.5 निर्देशाङ्क प्रयोगद्वारा त्रिभुज र चतुर्भुजको क्षेत्रफल (Area of triangle and quadrilateral using co-ordinaters)

तलका प्रश्नहरूका बारेमा समूहमा छलफल गर्नुहोस् :

(a) त्रिभुजको क्षेत्रफल निकाल्ने सूत्र के के छन् ?

(b) समलम्ब चतुर्भुजको क्षेत्रफल निकाल्ने सूत्र के होला ?

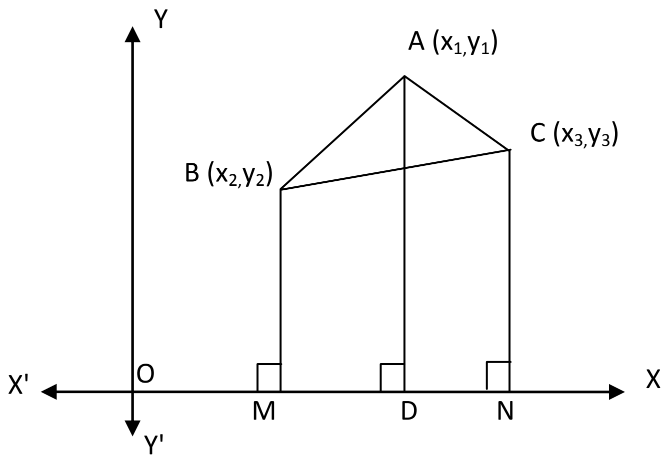
(c) क्षेत्रफलको एकाइ के हुन्छ ?

(d) क्षेत्रफल धनान्त्मक मात्र हुन्छ कि ऋणात्मक पनि हुन्छ, किन ? ऋणात्मक क्षेत्रफल आयो भने के गर्नुपर्छ ?

(e) के निर्देशाङ्कको प्रयोग गरी क्षेत्रफल निकाल्न सकिएला ?

यस पाठमा हामीहरू त्रिभुज र चतुर्भुजको शीर्षबिन्दुहरूको निर्देशाङ्क दिइएको अवस्थामा क्षेत्रफल निकाल्ने तरिकाका बारेमा अध्ययन गर्ने छौं ।

(क) **त्रिभुजको क्षेत्रफल (Area of Triangle)**



माथिको चित्रमा $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ **र** $C(x_3, y_3)$ **त्रिभुज** $\triangle ABC$ **का शीर्षबिन्दुहरू हुन् ।** $AD \perp OX$, $BM \perp OX$ **र** $CN \perp OX$

चित्रमा : $MD = OD - OM = x_1 - x_2$

$DN = ON - OD = x_3 - x_1$

$MN = ON - OM = x_3 - x_2$

$BM = y_2$, $AD = y_1$, **र** $CN = y_3$ **छ ।**

त्रिभुजबाट $\triangle ABC$ **को क्षेत्रफल**

= **समलम्ब चतुर्भुज** ABMD + **समलम्ब चतुर्भुज** ADNC - **समलम्ब चतुर्भुज** BMNC

$$= \frac{1}{2}(BM + AD)MD + \frac{1}{2}(AD + CN)DN - \frac{1}{2}(BM + CN)MN$$

$$= \frac{1}{2}[(y_2 + y_1)(x_{1} - x_2) + (y_1 + y_3)(x_3 - x_1) - (y_2 + y_3)(x_3 - x_2)]$$

$$= \frac{1}{2}[(x_1y_2 + x_1y_1 - x_2y_2 - x_2y_1) + (x_3y_1 + x_3y_3 - x_1y_1 - x_1y_3) - (x_3y_2 + x_3y_3 - x_2y_2 - x_2y_3)]$$

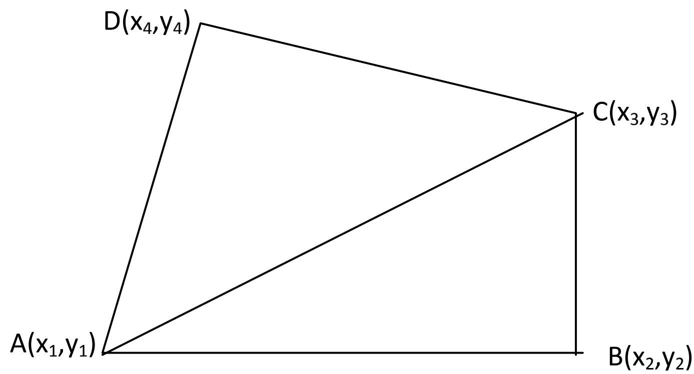
$$= \frac{1}{2}[x_1y_2 + x_1y_1 - x_2y_2 - x_2y_1 + x_3y_1 + x_3y_3 - x_1y_1 - x_1y_3) - (x_3y_2 + x_3y_3 - x_2y_2 - x_2y_3)]$$

$= \frac{1}{2}[x_1y_2 - x_2y_1 + x_2y_3 - x_3y_2 + x_3y_1 - x_1y_3]$

$\therefore$ त्रिभुज ABC को क्षेत्रफल A = $\frac{1}{2}|x_1y_2 - x_2y_1 + x_2y_3 - x_3y_2 + x_3y_1 - x_3y_1 - x_1y_3|$

यदि कुनै तिन ओटा बिन्दुहरू समरेखीय छन् भने तिनीहरूले बनाएको त्रिभुजको क्षेत्रफल कति हुन्छ ? छलफल गर्नुहोस् ।

(ख) **चतुर्भुजको क्षेत्रफल (Area of Quardilateral)**



माथिको चित्रमा A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), (x_3, y_3) **र** D(x_4, y_4) **चतुर्भुज** ABCD **का शीर्षबिन्दुहरू हुन् जहाँ विकर्ण** AC **जोडौं ।**

तब चतुर्भुज ABCD को क्षेत्रफल

= त्रिभुज ABC को क्षेत्रफल + ΔADC को क्षेत्रफल

$= \frac{1}{2}[x_1y_2 - x_2y_1 + x_2y_3 - x_3y_2 + x_3y_1 - x_1y_3] + \frac{1}{2}[x_1y_3 - x_3y_1 + x_3y_4 - x_4y_3 + x_4y_1 - x_1y_4$

$= \frac{1}{2}[x_1y_2 - x_2y_1 + x_2y_3 - x_3y_2 + x_3y_1 - x_1y_3 + x_1y_3 - x_3y_1 + x_3y_4 - x_4y_3 + x_4y_1 - x_1y_4]$

$= \frac{1}{2}[x_1y_2 - x_2y_1 + x_2y_3 - x_3y_2 + x_3y_4 + x_3y_2 + x_3y_4 - x_4y_3 + x_4y_1 - x_1y_4]$

$\therefore$ चतुर्भुज ABCD को क्षेत्रफल

$= \frac{1}{2}|[x_1x_2 - x_2y_1 + x_2y_3 - x_3y_2 + x_3y_4 - x_4y_3 + x_4y_1 - x_1y_4]|$

माथिका क्षेत्रफल निकाल्ने सुत्रहरू शीर्षबिन्दुहरू निम्नानुसार लेखेर बनाउन सकिन्छ :

त्रिभुजको क्षेत्रफल (A) = $\frac{1}{2}|[(x_1x_2 - x_2y_1) + (x_2y_3 - x_3y_2) + (x_3y_1 - x_1y_3)]|$

र चतुर्भुजको क्षेत्रफल

(A) = $\frac{1}{2}|[(x_1x_2 - x_2y_1) + (x_2y_3 - x_3y_2) + (x_3y_4 - x_4y_3) + (x_4y_1 - x_1y_4)]|$

नोट : त्रिभुजको क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \end{vmatrix}$

र चर्तुभुजको क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_1 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_1 \end{vmatrix}$ हुन्छ ।

उदाहरण 1

शीर्षबिन्दुहरू (2, -3), (3, 2) र (-2, 5) भएको त्रिभुजको क्षेत्रफल कति हुन्छ ? पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान

यहाँ, शीर्षबिन्दुहरू $(x_1, y_1) = (2, -3)$, $(x_{2,}y_2) = (3, 2)$ र $(x_{3,}y_3) = (-2, 5)$

त्रिभुजको क्षेत्रफल

$$A = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 2 & 3 & -2 & 2 \\ -3 & 2 & 5 & -3 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}|[(2 \times 2 - (-3) \times 3 + (3 \times 5 - 2(-2) + (-2) \times (-3) - 2 \times 5)]|$$

$$= \frac{1}{2}|[(4 + 9) + (15 + 4) + (6 - 10)]|$$

$$= \frac{1}{2}|13 + 19 - 4|$$

$$= \frac{1}{2}|28|$$

= 14 वर्ग एकाइ

उदाहरण 2

बिन्दुहरू (1, 4), (3, -2) र (-3, 16) समरेखीय हुन्छन् भनी प्रमाणित गर्नुहोस् ।

समाधान

यहाँ, A(1, 4), B(3, -2) र C(-3, 16) ΔABC का शीर्षबिन्दुहरू हुन् भनी मानौं ।

तब, ΔABC को क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 3 & -3 & 1 \\ 4 & -2 & 16 & 4 \end{vmatrix}$

$= \frac{1}{2}\left|\left[(-2-12)+(48-6)+(-12-16)\right]\right|$

$= \frac{1}{2}|(-14 + 42 - 28)|$

$= \frac{1}{2}|0| = 0$ वर्ग एकाइ

$\therefore \Delta$ABC को क्षेत्रफल= 0 भएकाले दिइएका बिन्दुहरू समरेखीय हुन्छन् ।

उदाहरण 3

शीर्षबिन्दुहरू क्रमशः (3, 4), (0, 5), (2, -1) र (3, -2) भएका चतुर्भुजको क्षेत्रफल कति हुन्छ ?

समाधान

यहाँ चतुर्भुजको क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 3 & 0 & 2 & 3 & 3 \\ 4 & 5 & -1 & -2 & 4 \end{vmatrix}$

$= \frac{1}{2}|(15-0)+(0-10)+(-4+3)+(12+6)|$

$= \frac{1}{2}|(15-10-1+18)|$

$= \frac{1}{2}|33-11|$

$= \frac{22}{2}$ = 11 वर्ग एकाइ

अभ्यास 4.5

1. (a) निर्देशाङ्कका आधारमा त्रिभुज र चतुर्भुजको क्षेत्रफल निकाल्ने सूत्र लेख्नुहोस् ।

   (b) तिन ओटा बिन्दुहरू समरेखीय हुन आवश्यक सर्त लेख्नुहोस् ।

2. निम्न लिखित शीर्षबिन्दुहरू भएका त्रिभुजको क्षेत्रफल निकाल्नुहोस् :

(a)	(3, -4), (-2, 3) र (4, 5)	(b)	(-3, 2), (5, -2) र (1, 3)
(c)	(1, 2), (-2, 3) र (-3, -4)	(d)	(2, 3), (-4, 7) र (5, -2)
(e)	(4, 6), (0, 4) र (6, 2)	(f)	(a, b), (b, c) र (c, a)
(g)	(c, a), (c+ a, a) र (c- a, -a)	(h)	(a, c+ a), (a, c) र (-a, c- a)
(i)	(2, 2), (6, 2) र (4, 4)	(j)	(0, 2), (5, 2) र (2, 4)

3. निम्न लिखित बिन्दुहरू समरेखीय हुन्छन् भनी प्रमाणित गर्नुहोस् :

(a)	(1, 4), (3, -2) र (-3, 16)	(b)	(-5, 1), (5, 5) र (10, 7)
(c)	(3, 1), (-2, 1) र $(\frac{1}{2}, 1)$	(d)	(-1, 0), (2, 2) र $(\frac{1}{2}, 1)$
(e)	(0, 2), (1, 2) र (2, 2)	(f)	(3x, 0), (0,3y) र (x, 2y)
(g)	(a, b + c), (b, c + a) र (c, a + b)	(h)	(1, 2), (2, 3) र (2, 4)
(i)	(0, 2), (1, 3) र (2, 4)	(j)	(1, 3), (2, 4) र (3, 5)

4. तलका बिन्दुहरू चतुर्भुजहरूका क्रमिक शीर्षबिन्दुहरू हुन् भने चतुर्भुजको क्षेत्रफल निकाल्नुहोस् :

(a)	(3, -2), (-5, 6), (7, -4) र (-1, 2)	(b)	(1, 1), (3, 4) (5, -2) र (4, -7)
(c)	(1, 2), (6, 2), (5, 3) र (3, 4)	(d)	(-3, 1), (4, -4), (2, 6) र (7, 1)
(e)	(-1, 6), (-3, -9), (5, -8) र (3, 9)	(f)	(4, 3), (-5, 6), (-7, -2) र (0, -7)
(g)	(-3, 5), (4, -3), (6, 4) र (5, 6)	(h)	(3, 1), (2, 4), (0, 0) र (5, 3)
(i)	(6, 8), (6- 4), (4, -2) र (0, 10)	(j)	(0, 0), (4, 0), (4, 4) र (0, 4)

5. (a) यदि बिन्दुहरू (2, 7), (3, 6) र (a, 5) समरेखीय हुन् भने a को मान पत्ता लगाउनुहोस् :

   (b) यदि (a, 0), (0, a) र (x, y) एउटै रेखामा पर्छन् भने प्रमाणित गर्नुहोस् :

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

   (c) यदि (3, a), (4,5) र (1, 6) शीर्षबिन्दुहरू भएको त्रिभुजको क्षेत्रफल 5 एकाइ छ भने a को मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

(d) यदि (p, 2 – 2p), (1 – p, 2p) र (-4, 6 – 2p) बिन्दुहरू समरेखीय छन् भने P को मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

6. (a) A, B र C का निर्देशाङ्कहरू क्रमशः (6, 3), (-3, 5) र (4, -2) छन् । यदि P बिन्दुको निर्देशाङ्क (x, y) छ भने प्रमाणित गर्नुहोस् : $\frac{\Delta PBC}{\Delta ABC} = \frac{x + y - 2}{7}$ हुन्छ ।

(b) P, Q, R बिन्दुहरूको निर्देशाङ्कहरू क्रमशः (-1, 5), (-3, 1) र (5, 7) हुन् । यदि L,M र N बिन्दुहरू क्रमशः QR, RP र PQ का मध्यबिन्दुहरू हुन् भने $\Delta PQR = 4 (\Delta LMN)$ हुन्छ भनी प्रमाणित गर्नुहोस् ।

(c) A, B, C र D बिन्दुहरूको निर्देशाङ्कहरू क्रमशः (6, 3), (-3, 5), (4, -2) र (k, 3k) छन् । यदि $\frac{\Delta \mathrm{OBC}}{\Delta \mathrm{ABC}} = \frac{1}{2}$ छ भने k को मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

(d) यदि P(k, k + 1), Q(0, 7), (2, -1) र S(3, -2) चतुर्भुज PQRS का शीर्षबिन्दुहरू छन् र चतुर्भुज PQRS को क्षेत्रफल ΔPRS को क्षेत्रफलको 8 गुणा छ भने k को मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

7. (a) तपाईंको विद्यालयको खेलमैदानको एउटा त्रिभुजाकार भागमा चिह्न लगाउनुहोस् । कुनै स्थानलाई उद्गम बिन्दु (origin) लिएर ती बिन्दुहरूका निर्देशाङ्क पत्ता लगाई उक्त निर्देशाङ्क प्रयोग गरी सो त्रिभुजाकार भागको क्षेत्रफल पत्ता लगाउनुहोस् ।

(b) तपाईंको घरको आँगनका बिचमा पर्ने कुनै बिन्दुलाई उद्गम बिन्दु लिनुहोस् । आँगनका कुनाहरूको निर्देशाङ्क प्रयोग गरी सो आँगनको क्षेत्रफल (एकाइ मिटरमा) पत्ता लगाउनुहोस् ।

एकाइ **5**

त्रिकोणमिति (Trigonometry)

5.0 पुनरावलोकन (Review)

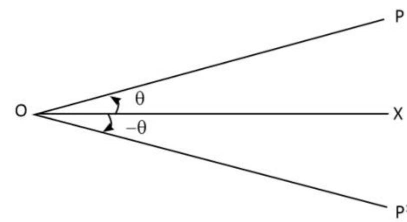
तलका प्रश्नहरूका बारेमा समूहमा छलफल गर्नुहोस् :

(a) समकोण त्रिभुजमा सबैभन्दा लामो भुजा कुन हो ?

(b) समकोण त्रिभुजमा भुजाहरूको सम्बन्ध के हुन्छ ?

5.1 कोणिक नाप (Measurement of angles)

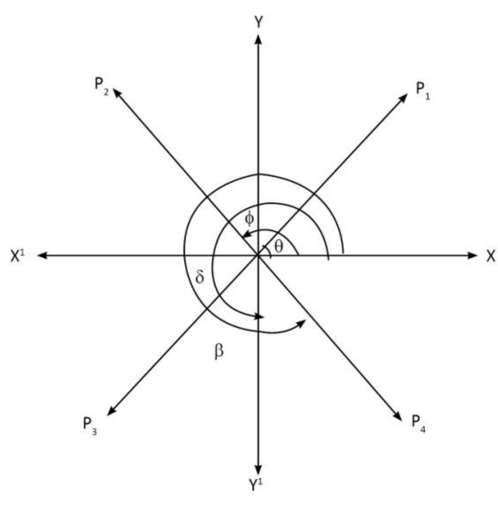
तलका चित्र अवलोकन गर्नुहोस् :



प्रारम्भिक रेखा OX सँग परिक्रमी रेखाहरू OP र OP ले बनाएका कोणहरूलाई के केले जनाइएको छ ? यसमा -θ लेख्नुको अर्थ के हुनसक्छ ? छलफल गर्नुहोस् ।

परिक्रमी रेखाले प्रारम्भिक रेखामा घडीको विपरीत दिशामा घुम्दा बनाएको कोणलाई धनात्मक कोण र घडीको सुईको दिशामा घुम्दा बनाएको कोणलाई ऋणात्मक कोण भनिन्छ ।

तलको चित्रमा सरल रेखाहरू XOX' र YOY' बिन्दु O मा लम्ब भई काटिएका छन् । यसरी काटिँदा समतल सतह कति भागमा विभाजन भएको छ ? प्रत्येक भागलाई के भनिन्छ ? प्रत्येक भागमा कति डिग्रीको कोण बन्दछ ? OX लाई प्रारम्भिक रेखा मानेर परिक्रमी रेखा OP लाई घडीको सुईको विपरीत दिशामा घुमाउँदा बनेका कोणहरू θ, ϕ, δ र β क्रमशः कुन कुन चतुर्थांशमा बनेका छन् । तिनीहरू प्रत्येकको मान कति हुन सक्छ ? छलफल गर्नुहोस् ।



(क) **कोण नापका विभिन्न पद्धतिहरू (Different System of Measurement of Angle)**

कोणहरूलाई कुन कुन एकाइमा नाप्न सकिन्छ ? छलफल गर्नुहोस् । हाल प्रचलनमा रहेका कोण नाप्ने पद्धतिहरूमध्ये प्रमुख तिन ओटा पद्धतिहरू यस प्रकारका छन् :

(i) षट्दशांशक पद्धति (sexagesimal system)

(ii) सतांशक पद्धति (centesimal system)

(iii) वृत्तीय नाप पद्धति (circular measure system)

(i) षट्दशांशक पद्धति (Sexagesimal System)

यस पद्धतिमा कोणलाई डिग्री ($^\circ$) एकाइमा नापिन्छ । यस पद्धतिलाई British system पनि भनिन्छ । परिक्रमी रेखाले प्रारम्भिक रेखासँग एक फन्को लगाउँदा 360° को कोण बन्दछ र एक समकोणमा 90° हुन्छ । प्रत्येक 1° लाई 60 मिनेट र 1' लाई 60 सेकेन्ड (60'') मा विभाजन गरिएको हुन्छ ।

1 समकोण = 90°
1° = 60'
1' = 60''

उदाहरण 1

(a) 60° 15' 30'' लाई सेकेन्डमा बदल्नुहोस् ।

(b) 20° 10' 12'' लाई डिग्रीमा बदल्नुहोस् ।

समाधान

(a) यहाँ $60^\circ 15' 30''$

$= (60 \times 60 \times 60 + 15 \times 60 + 30)''$

$= (236000 + 900 + 30)''$

$= 236930''$

(b) $20^\circ 10' 2''$

$= \left(20 + \frac{10}{60} + \frac{12}{60 \times 60}\right)^\circ$

$= \left(20 + \frac{1}{6} + \frac{1}{300}\right)^\circ$

$= \left(\frac{6000 + 50 + 1}{300}\right)^\circ$

$= \left(\frac{6051}{300}\right)^\circ = 20.17^\circ$

(ii) सतांशक पद्धति (Centesimal System)

यस पद्धतिमा कोणलाई ग्रेड (grade) ($.^g$) एकाइमा नापिन्छ । यस पद्धतिलाई French system भनिन्छ । परिक्रमी रेखाले प्रारम्भिक रेखासँग एक फन्को परिक्रमण गर्दा 400^g को कोण बन्दछ र एक समकोणमा 100^g हुन्छ । प्रत्येक 1^g लाई 100 मिनेट (100') मिनेट र प्रत्येक 1′ लाई 100″ सेकेन्ड (100'') विभाजित गरिएको छ ।

1 समकोण $= 100^g$
$1^g = 100$
$1' = 100''$

उदाहरण 2

(a) सेकेन्डमा बदल्नुहोस्: $270^g 50' 40''$

(b) ग्रेडमा बदल्नुहोस्: $45^g\ 40'\ 90''$

समाधान

(a) $27^g\ 50'\ 40''$

$= (27 \times 100 \times 100 + 50 \times 100 + 40)''$

$= (270000 + 5000 + 60)^{11} = 275049''$

(b) $45^g\ 40'\ 90''$

$= \left(45 + \frac{40}{100} + \frac{90}{100 \times 100}\right)^g$

$= \left(45 + \frac{40}{100} + \frac{90}{1000}\right)^g$

$= \left(45 + \frac{40}{10} + \frac{9}{1000}\right)^g$

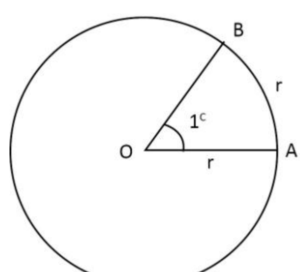
$= \left(\frac{45409}{1000}\right)^g = 45.409^g$

(iii) वृत्तीय नाप प्रणाली (Circular Measure System)

यो कोण नाप्ने मानक पद्धति हो । यस पद्धतिमा कोणलाई रेडियन (radian) (^{c}) एकाइमा नापिन्छ । रेडियन (1^c) को कोण भनेको वृत्तको केन्द्रमा वृत्तको अर्धव्यास बराबरको चापले बनाएको कोण हो ।

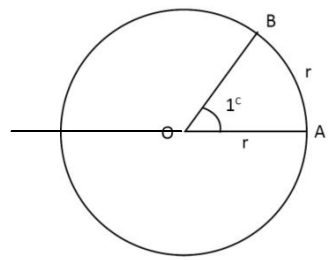
रेडियन कोणको प्रामाणिक एकाइ (standard unit) हो ।

चित्रमा $\measuredangle AOB = 1^c$ हुन्छ ।



परिक्रमी रेखाले प्रारम्भिक रेखासँग 1 फन्को लगाउँदा $2\pi^c$ को कोण बन्दछ । त्यस्तै वृत्तको केन्द्रमा बन्ने पूरा कोण पनि $2\pi^c$ हुन्छ ।

साध्य 1 "रेडियन एउटा अचल कोण हो ।"



केन्द्रबिन्दु O र अर्धव्यास OA = r भएको एउटा वृत्त खिचौं । अर्धव्यास r सँग बराबर लम्बाइ भएको चाप $\widehat{AB}$ लिएर केन्द्रीय कोण ∡AOB = 1^c को कोण खिचौं र व्यास AC जोडौं

अब, $\frac{\measuredangle AOB}{\measuredangle AOC} = \frac{\widehat{AB}}{\widehat{ABC}}$ [∴केन्द्रीय कोण र सम्मुख चापको सम्बन्धबाट]

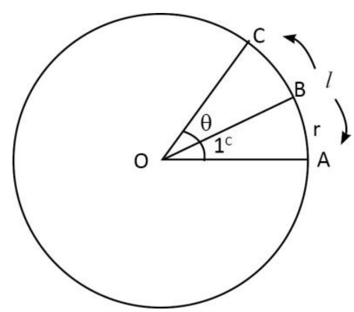
अथवा, $\frac{1^c}{180°} = \frac{r}{\pi r}$[∴ ∡AOC = सरल कोण = 180° र $\widehat{ABC}$ = अर्धवृत्तको परिधि = πr]

∴ $1^c = \frac{180°}{\pi}$

180° र π दुवै अचल राशि भएकाले 1^c एउटा अचल कोण हो ।

साध्य 2

अर्धव्यास r भएको वृत्तमा लम्बाइ l भएको चापले केन्द्रमा बनाएको कोण θ को मान $\theta = \frac{l}{r}$ हुन्छ ।



केन्द्र O र अर्धव्यास OA = r भएको वृत्त खिचौं । यहाँ r बराबर लम्बाइ भएको $\widehat{AB}$ चापले केन्द्रमा ∡AOB =1^c को कोण र $\widehat{AC} = l$ भएको चापले केन्द्रमा ∡AOC = θ कोण बनाउँछ ।

अब, $\frac{\measuredangle AOC}{\measuredangle AOB} = \frac{\widehat{ABC}}{\widehat{AB}}$

अथवा, $\frac{\theta}{1^c} = \frac{l}{r}$

$\therefore \theta = \frac{l^c}{r}$

उदाहरण 3

अर्धव्यास 5 cm भएको वृत्तमा 9cm को चापले केन्द्रमा कति रेडियनको कोण बनाउँछ ?

समाधान

यहाँ, अर्धव्यासको लम्बाइ (r) = 5cm

चापको लम्बाइ (l) = 9cm

केन्द्रीय कोण (θ) =?

अब, $\theta = \frac{l}{r} = \frac{9}{5} = 1.8^c$

(ख) **डिग्री, ग्रेड र रेडियन बिचको सम्बन्ध (Relation between degree, grade & radian)**

तलका तालिकाहरूमा डिग्री, ग्रेड र रेडियनको सम्बन्ध प्रस्तुत गरिएको छ :

तालिका 1

कोण	**डिग्री**	**ग्रेड**	**रेडियन**
एक परिक्रमण	$360°$	400^g	$2\pi^c$
एक समकोण	$\frac{360°}{4} = 90°$	$\frac{400^g}{4} = 100^g$	$\frac{2\pi^c}{4} = \frac{\pi^c}{2}$

तालिका 2

$90° = 100^g$	$10^g = 9^0$	$180° = \pi^c$	$\pi^c = 180°$	$\pi^c = 200^g$	$200^g = \pi^c$
$1^0 = \frac{100^g}{90} = \frac{10^g}{9}$	$1^g = \frac{90°}{100} = \frac{9^0}{10}$	$1° = \frac{\pi^c}{180}$	$1^c = \frac{180°}{\pi}$	$1^c = \frac{200^g}{\pi}$	$1^g = \frac{\pi^c}{200}$

उदाहरण 4

(a) 70^g लाई डिग्रीमा बदल्नुहोस् ।

(b) $135°$ लाई ग्रेडमा बदल्नुहोस् ।

(c) $40°$ लाई रेडियनमा बदल्नुहोस् ।

(d) 90^g लाई रेडियनमा बदल्नुहोस् ।

(e) $\frac{\pi^c}{4}$ लाई डिग्रीमा बदल्नुहोस् ।

(f) $\frac{5\pi^c}{8}$ लाई ग्रेडमा बदल्नुहोस् ।

समाधान

(a) यहाँ, $1^g = \frac{90°}{100}$

$70^g = \frac{90}{100} \times 70^0 = 63°$

$\therefore 70^g = 63^g$

(b) यहाँ,

$180° = 200^g$

$1^0 = \frac{200^g}{180}$

$135^0 = \frac{200}{180} \times 135^g$

$\therefore$ $135° = 150^g$

(c) यहाँ,

$180° = \pi^c$

$1^0 = \frac{\pi^c}{180}$

$40^0 = \frac{\pi^c}{180} \times 40$

$\therefore$ $40° = \frac{2\pi^c}{9}$

(d) यहाँ,

$200^g = \pi^c$

$1^g = \frac{\pi^c}{200}$

$90^g = \frac{\pi}{200} \times 90$

$\therefore$ $90^g = \frac{9\pi^c}{20}$

(e) यहाँ,

$\pi^c = 180°$

$1^c = \frac{180°}{\pi}$

$\frac{\pi^c}{4} = \frac{180°}{\pi} \times \frac{\pi}{4}$

$\therefore$ $\pi^c = 45°$

(f) यहाँ $\pi^c = 200^g$

$1^c = \frac{200^g}{\pi}$

$\frac{5\pi^c}{\pi} = \frac{200^g}{\pi} \times \frac{5\pi}{8}$

$\therefore$ $\frac{5\pi^c}{8} = 125^g$

उदाहरण 5

दुई कोणहरूको योग $100°$ र फरक 20^g भए तिनीहरूको नाप डिग्रीमा पत्ता लगाउनुहोस ।

समाधान

आवश्यक कोणहरूको मान x र y मानौँ ।

प्रश्नअनुसार

$x + y = 100°$ --- (i)

र $x - y = 20^g$

अथवा, $x - y = 20 \times \frac{9°}{10}$

अथवा, $x - y = 18°$ - - - (ii)

अब, समीकरण (i) र (ii) जोड्दा

$x + y = 100°$

$x - y = 18°$

$2x \quad = 118°$

अथवा, $x = 59°$

फेरि, x को मान समीकरण (i) मा राख्दा

$59° + y = 100$

अथवा, $y = 100° - 59°$

अथवा, $y = 41°$

अतः आवश्यक कोणहरू 59° र 41° हुन् ।

उदाहरण 6

एउटा समकोण त्रिभुजका दुई न्यूनकोणहरूको फरक $\frac{\pi^c}{9}$ भए ती कोणहरूको मान डिग्रीमा पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान

मानौं समकोण त्रिभुजका दुई न्यूनकोणहरूको मान $x°$ र $y°$ छ ।

यहाँ, $x + y + 90° = 180°$

अथवा, $x + y = 90°$ -- - -(i)

र $x - y = \frac{\pi^c}{9}$

अथवा, $x - y = \frac{\pi^c}{9} \times \frac{180°}{\pi}$

अथवा, $x - y = 20°$ - - - (ii)

समीकरण (i) र (ii) जोड्दा

$x + y = 90°$

$x - y = 20°$

$2x = 110°$

अथवा, $x = \frac{110}{2}$

अथवा, $x = 55°$

फेरि, x को मान समीकरण (i) मा राख्दा

$55° + y = 90°$

अथवा, $y = 90° - 95°$

अथवा, $y = 35°$

अतः ती कोणहरूको मान 55° र 35° हुन्छ ।

उदाहरण 7

एक जना छात्राले पिङ खेल्दा पिङको केन्द्रबाट 1.5^c को कोण बन्छ । यदि पिङको लम्बाइ 8m छ भने छात्राले एक पटकमा पिङमा केन्द्रबाट एकातर्फ कति दुरी पार गर्छिन् पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान

यहाँ पिङको लम्बाइ = वृत्त अर्धव्यास (r) = 8m

केन्द्रीय कोण $(\theta) = 1.5^c$

पार गरेको दुरी (l) =?

अब, $\theta = \frac{l}{r}$

अथवा, $1.5 = \frac{l}{8}$

अथवा, $l = 8 \times 1.5$

अथवा, l = 12m

$\therefore$ एक पटकमा छात्राले पिङमा केन्द्रबाट एकातर्फ 12m दुरी पार गर्छिन् ।

उदाहरण 8

घडीको मिनेट सुई र घण्टा सुईको बिचमा 7:20 बज्दा कति रेडियनको कोण बन्छ, पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान

घडीमा 7:20 बजेको बेला मिनेटको सुई ठिक चारमा र घण्टाको सुई $\frac{20}{60} = \frac{1}{3}$ अथवा 7 र 8 को बिचमा बन्ने कोणको एक तिहाइ भाग पूरा गरिसकेको हुन्छ । त्यसैले घण्टा सुई र मिनेट सुईका बिचको कोण $= 3 \times 30^0 + \frac{1}{3} \times 30^0$ [दुई ओटा क्रमागत अङ्क बिचको कोण = $\frac{360^0}{12}$]

$= 90° + 10° = 100° = 100 \times \frac{\pi^c}{180} = \frac{5\pi}{9}$ रेडियन

अभ्यास 5.1

1. सेकेन्डमा बदल्नुहोस् :

(a) 45 35' 25''　(b) 60° 50' 40''　(c) 30° 40' 50''

(d) 55° 30' 10''　(e) 10° 25' 48''　(f) 55° 56' 28''

2. डिग्रीमा बदल्नुहोस् :

(a) 25° 45' 30''　(b) 30° 15' 15''　(c) 49° 50' 25''

(d) 44° 35' 25''　(e) 80° 50' 20''　(f) 76° 26' 33''

3. सेकेन्डमा बदल्नुहोस् :

(a) 30^g 20' 10''　(b) 25^g 15' 10''　(c) 45^g 35' 25''

(d) 30^g 12'　(e) 26^g 15''　(f) 47^g 48' 49''

4. डिग्रीमा बदल्नुहोस् :

(a) 50^g　(b) 81^g　(c) 135^g　(d) 160^g　(e) 70^g　(f) 250^g

5. ग्रेडमा बदल्नुहोस् :

(a) 50^g 40' 8''　(b) 40^g 32' 33''　(c) 56^g 85' 50''

(d) 45^g 35''　(e) 37^g 50'　(f) 98^g 42' 37''

6. ग्रेडमा बदल्नुहोस् :

(a) 45°　(b) 270°　(c) 18°　(d) 36°　(e) 108°　(f) 54°

7. (a) कुनै समकोण त्रिभुजको एउटा कोण 60^g भए बाँकी कोणको नाप डिग्रीमा पत्ता लगाउनुहोस् ।

(b) एउटा समकोण त्रिभुजको एउटा न्यूनकोण 63° छ भने बाँकी कोणको नाप ग्रेडमा पत्ता लगाउनुहोस् ।

(c) एउटा त्रिभुजका तिन ओटा कोणहरूको नापको अनुपात 2:3:4 भए तिनीहरूको नाप डिग्रीमा निकाल्नुहोस् ।

(d) एउटा त्रिभुजका कोणहरूको अनुपात 5:7:8 भए तिनीहरूको मान ग्रेडमा पत्ता लगाउनुहोस् ।

(e) त्रिभुजका पहिलो कोण 72° छ । बाँकी कोणहरूको अनुपात 1:3 भए सबै कोणहरूको नाप ग्रेडमा पत्ता लगाउनुहोस् ।

(f) चतुर्भुजका 4 कोणहरूको अनुपात 3:4:5:6 तिनीहरूको नाप डिग्रीमा पत्ता लगाउनुहोस् ।

8. रेडियनमा बदल्नुहोस् :

(a) 70° (b) 150° (c) 120° (d) 30° (e) 45° (f) 50^g

9. डिग्रीमा बदल्नुहोस् :

(a) $\frac{\pi^c}{2}$ (b) $\frac{3\pi^c}{2}$ (c) $\frac{7\pi^c}{50}$ (d) $\frac{4\pi^c}{9}$

(e) $\frac{5\pi^c}{12}$ (f) $\frac{\pi^c}{9}$

10. ग्रेडमा बदल्नुहोस् :

(a) $\frac{\pi^c}{5}$ (b) $\frac{3\pi^c}{10}$ (c) $\frac{4\pi^c}{25}$ (d) $\frac{\pi^c}{4}$ (e) $\frac{\pi^c}{8}$ (f) $\frac{3}{2}\pi^c$

11. (a) एक समकोणको $\frac{3}{5}$ भागको मान रेडियनमा कति हुन्छ ?

(b) एक समकोणको 40% को रेडियन मान कति हुन्छ ?

(c) कुनै समकोण त्रिभुजको एउटा कोण 60° भए बाँकी कोणको मान रेडियनमा पत्ता लगाउनुहोस् ।

(d) एउटा समकोण त्रिभुजको एउटा कोणको मान 50^g भए बाँकी कोणको नाप रेडियमा पत्ता लगाउनुहोस् ।

(e) सरल कोणको एक तिहाइको रेडियन मान कति हुन्छ ?

(f) एउटा समकोण त्रिभुजका दुई न्यूनकोणहरूको फरक $\frac{3\pi^c}{10}$ भए तिनीहरूको मान ग्रेडमा पत्ता लगाउनुहोस् ।

12. तलका प्रत्येक अवस्थामा घडीको घण्टा सुई र मिनेट सुई बिचको कोणको मान वृत्तीय नापमा पत्ता लगाउनुहोस् :

(a) 4:00 (b) 1:30 (c) 6:45 (d) 4:30

13. (a) यदि एउटा वृत्तको 44cm को चापले केन्द्रमा 60° को कोण बनाउँछ भने सो वृत्तको अर्धव्यास पत्ता लगाउनुहोस् ।

(b) एउटा वृत्तको 15cm चापले केन्द्रमा 81° को कोण बनाउँछ भने वृत्तको अर्धव्यास पत्ता लगाउनुहोस् ।

(c) 15cm को चापले केन्द्रमा $\frac{3\pi^c}{4}$ को कोण बनाउँछ भने वृत्तको अर्धव्यासको लम्बाइ पत्ता लगाउनुहोस् ।

(d) 18cm अर्धव्यास भएको वृत्तमा 16.2 cm चापले केन्द्रमा कति डिग्रीको कोण बनाउँछ ?

(e) कुनै वृत्तको अर्धव्यास 7.254cm छ । 3.8 cm को चापले त्यसको केन्द्रमा कति डिग्रीको कोण बनाउँछ ?

(f) एउटा घडीको मिनेट सुई 3cm लामो छ । 20 मिनेटमा सुईको टुप्पोले कति दुरी पार गर्छ ?

(g) एउटा गाईलाई 10m लामो डोरीले किलामा बाँधिएको छ । डोरी तन्किने गरी घुमिरहेको बेला डोरीले $\frac{7\pi^c}{18}$ कोण बनाउँछ भने गाईले पार गरेको दुरी पत्ता लगाउनुहोस् ।

(h) एउटा घोडालाई 11m लामो डोरीले किलामा बाँधिएको छ । डोरी तन्कने गरी घुमिरहँदा डोरीले किलामा 70° को कोण बनाउँछ भने घोडाले घुमेको दुरी पत्ता लगाउनुहोस् ।

(i) 20.5cm को दुरी घुम्दा पेन्डुलमले केन्द्रमा 5° को कोण बनाउँछ भने उक्त वृत्ताकार बाटोको परिधि पत्ता लगाउनुहोस् ।

(j) कुनै व्यक्ति प्रतिमिनेट 100m का दरले वृत्ताकार बाटोमा घुम्दा 36sec मा वृत्तको केन्द्रमा 56° कोण बनाउँछ भने उक्त वृत्ताकार बाटोको परिधि पत्ता लगाउनुहोस् ।

14. यदि D, G र C ले क्रमशः कुनै कोणको डिग्री ग्रेड र रेडियन मान दिन्छ भनी प्रमाणित गर्नुहोस् : $\frac{D}{180} = \frac{G}{200} = \frac{C}{\pi}$

5.2 त्रिकोणमितीय अनुपात (Trigonometric Ratios)

(क) परिचय

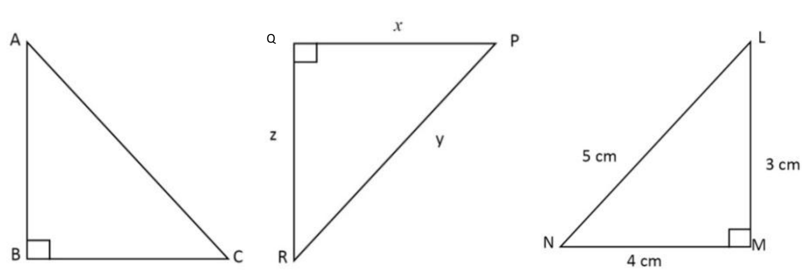
निम्न प्रश्नहरूका बारेमा समूहमा छलफल गर्नुहोस् :

(a) त्रिभुज भनेको के हो ? त्रिभुजलाई कसरी वर्गीकरण गर्न सकिन्छ ?

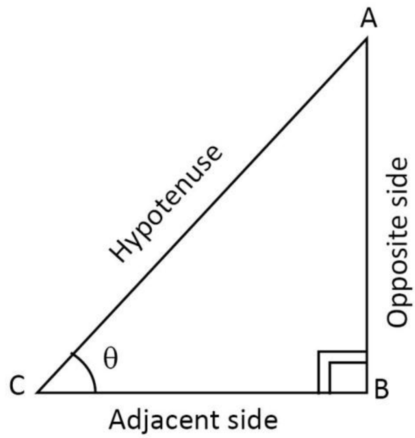
(b) त्रिकोणमिति शब्दको शाब्दिक अर्थ के हुन्छ ? अनुपात भन्नाले के बुझ्नु हुन्छ ?

(c) त्रिकोणमितीय अनुपातहरू कसरी बन्छन् ?

(d) तलका समकोण त्रिभुजहरूमा भुजाहरूबिचको सम्बन्ध पाइथोगोरस साध्यअनुसार के हुन्छ ? छलफल गर्नुहोस् । प्रत्येक त्रिभुजमा भुजाहरूका सम्भावित सबै अनुपातको सूची बनाउनुहोस् ।



तलको समकोणी त्रिभुजको अवलोकन गर्नुहोस् र सन्दर्भ कोण θ का आधारमा सम्मुख भुजा, (opposite side) आसन्न भुजा (adjacent side) र कर्णहरू (hypotenuse) बाट बन्ने सम्भावित सबै अनुपातहरू लेख्नुहोस् :



तपाईँहरूले बनाउनु भएका अनुपातहरू मध्ये opposite side/hypotenuse लाई sine, अथवा, छोटकरीमा sin भनिन्छ । त्यस्तै, $\frac{\text{adjacent}}{\text{hypotenuse}}$ लाई cosine र छोटकरीमा cos भनिन्छ र $\frac{\text{opposite side}}{\text{adjacent side}}$ लाई tangent र छोटकरीमा tan भनिन्छ । सन्दर्भ कोणको सम्मुख भुजालाई लम्ब perpendicular (p), कर्ण hypotenuse (h) र आसन्न भुजा base(b) ले जनाइन्छ ।

यहाँ, sin θ= $\frac{\text{opposite side}}{\text{hypotenuse}} = \frac{\text{perpendicular}}{\text{hypotenuse}} = \frac{\text{p}}{\text{h}}$

cos θ= $\frac{\text{Adjacent}}{\text{hypotenuse}} = \frac{\text{base}}{\text{hypotenuse}} = \frac{\text{b}}{\text{h}}$

tan θ= $\frac{\text{opposite side}}{\text{adjacent side}} = \frac{\text{perpendicular}}{\text{base}} = \frac{\text{p}}{\text{b}}$

यी तिन ओटा अनुपातहरूलाई आधारभूत त्रिकोणमितीय अनुपात भनिन्छ । यिनका व्युत्क्रम अनुपातहरू (reciprocals) क्रमशः

$\frac{\text{hypostenuse}}{\text{opposite side}}, \frac{\text{hypostenuse}}{\text{adjacent side}}, \frac{\text{adjacent side}}{\text{opposite side}}$ लाई cosecant, secant र cotangent भनिन्छ । यिनीहरूलाई छोटकरीमा क्रमशः cosec, sec र cot लेखिन्छ ।

cosec θ = $\frac{\text{hypotenuse}}{\text{opposite side}} = \frac{\text{hypotenuse}}{\text{perpendicular}} = \frac{\text{h}}{\text{p}}$

sec θ = $\frac{\text{hypotenuse}}{\text{adjacent side}} = \frac{\text{hypotenuse}}{\text{base}} = \frac{\text{b}}{\text{h}}$

cot θ = $\frac{adjacentside}{oppositeside} = \frac{base}{perpendicular} = \frac{b}{p}$

(ख) **त्रिकोणमितीय अनुपातहरूको सम्बन्ध (Relation of Trigonometric Ratios)**

(i) $\sin\theta \,\text{cosec}\theta = \frac{p}{h} \cdot \frac{h}{p} = 1$

$\therefore \sin\theta = \frac{1}{cosec\theta}$ र $\text{cosec}\theta = \frac{1}{sin\theta}$

(ii) $\cos\theta \sec\theta = \frac{b}{h} \cdot \frac{h}{b} = 1$

$\therefore \cos\theta = \frac{1}{sec\theta}$ र $\sec\theta = \frac{1}{cos\theta}$

(iii) $\cot\theta \tan\theta = \frac{b}{p} \cdot \frac{p}{b} = 1$

$\therefore \cot\theta = \frac{1}{tan\theta}$ र $\tan\theta = \frac{1}{cot\theta}$

(iv) $\tan\theta = \frac{p}{b} = \frac{\frac{p}{h}}{\frac{b}{h}} = \frac{sin\theta}{cos\theta}$

$\therefore \frac{sin\theta}{cos\theta} = \frac{p/h}{b/h} = \frac{p}{b} = \tan\theta$

(v) $\cot\theta = \frac{b}{p} = \frac{\frac{p}{h}}{\frac{b}{h}} = \frac{cos\theta}{sin\theta}$

$\therefore \frac{cos\theta}{sin\theta} = \frac{b/h}{p/h} = \frac{b}{p} = \cot\theta$

उदाहरण 1

यदि $\cos\theta = \frac{4}{5}$ भए बाँकी त्रिकोणमितीय अनुपातहरूको मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान

यहाँ, $\cos\theta = \frac{4}{5}$

अथवा, $\frac{b}{h} = \frac{4}{5} = \frac{4k}{5k}$ मानौँ

अब, $P = \sqrt{h^2 - b^2} = \sqrt{(5k)^2 - (4k)^2}$

$= \sqrt{25k^2 - 16k^2}$

$= \sqrt{9k^2} = 3k$

$\sin\theta = \frac{p}{h} = \frac{3k}{5k} = \frac{3}{5}$

$\tan\theta = \frac{p}{b} = \frac{3k}{4k} = \frac{3}{4}$

$\cot\theta = \frac{p}{b} = \frac{4k}{3k} = \frac{4}{3}$

$\sec\theta = \frac{b}{h} . \frac{h}{b} = \frac{5k}{4k} = \frac{5}{4}$

र $\operatorname{cosec}\theta = \frac{h}{p} = \frac{5k}{3k} = \frac{5}{3}$

उदाहरण 2

यदि $\tan\theta = \frac{3}{4}$ भए प्रमाणित गर्नुहोस् । $\frac{2\sin\theta+3\cos\theta}{3\sin\theta-2\cos\theta} = 18$

समाधान

यहाँ, $\tan\theta = {}^{3}/_{4}$

$$\frac{2\sin\theta + 3\cos\theta}{3\sin\theta - 2\cos\theta}$$

अब, L.H.S $= \dfrac{\frac{2\sin\theta+3\cos\theta}{\cos\theta}}{\frac{3\sin\theta-2\cos\theta}{\cos\theta}}$

$= \dfrac{2\frac{\sin\theta}{\cos\theta} + 3\frac{\cos\theta}{\cos\theta}}{3\frac{\sin\theta}{\cos\theta} - 2\frac{\cos\theta}{\cos\theta}}$

$= \frac{2\tan\theta+3}{3\tan\theta-2} \quad = \frac{2 \times {}^{3}/_{4} + 3}{3 \times {}^{3}/_{4} - 2}$

$= \dfrac{\frac{6+12}{4}}{\frac{9-8}{4}} \quad = \frac{18}{1}$

= 18 = R.H.S. प्रमाणित भयो ।

वैकल्पिक विधि

यहाँ, $\tan\theta = \frac{3}{4} = \frac{p}{b}$

$$\frac{p}{b} = \frac{3}{4}$$

अथवा, p = 3, b = 4 मानौँ

अतः $h = \sqrt{p^2 + b^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$

L.H.S: $\frac{2\sin\theta+3\cos\theta}{3\sin\theta-2\cos\theta}$

$= \dfrac{2\times\frac{p}{h}+3\times\frac{b}{h}}{3\times\frac{b}{h}-2\times\frac{b}{h}} = \dfrac{2p+3{}^{b}/_{h}}{3p-2{}^{b}/_{h}} = \dfrac{2p+3b}{3p-2b}$

$= \frac{2\times3+3\times4}{3\times3-2\times4} = \frac{6+12}{9-8} = \frac{18}{1} = 18$ = R.H.S. प्रमाणित भयो ।

अभ्यास 5.2

1. (a) यदि $\sin\theta = \frac{5}{13}$ भए बाँकी त्रिकोणमितीय अनुपातहरूको मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

   (b) यदि $\sec\theta = \frac{2}{\sqrt{3}}$ भए बाँकी त्रिकोणमितीय अनुपातहरूको मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

   (c) यदि $\cot\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$ भए बाँकी त्रिकोणमितीय अनुपातहरूको मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

   (d) यदि $\cos\alpha = \frac{24}{25}$ भए बाँकी त्रिकोणमितीय अनुपातहरूको मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

   (e) यदि $\operatorname{cosec}A = \sqrt{2}$ भए बाँकी त्रिकोणमितीय अनुपातहरूको मान पत्ता लगाउनुहोस्

2. (a) यदि $\tan\theta = \frac{2}{3}$ भए $\frac{\sin\theta - \cos\theta}{\sin\theta + \cos\theta}$ को मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

   (b) यदि $\cot\theta = \frac{4}{3}$ भए $\frac{3\sin\theta - 2\cos\theta}{2\sin\theta + 3\cos\theta}$ को मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

   (c) यदि $\sin\theta = \frac{3}{5}$ भए $5\cos\theta + 4\tan\theta$ को मान निकाल्नुहोस् ।

   (d) यदि $\cos\theta = \frac{4}{5}$ भए $5\sin\theta + 3\cot\theta$ को मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

   (e) यदि $\cot\theta = \frac{13}{5}$ भए $13\cos\theta + 24\tan\theta$ को मान निकाल्नुहोस् ।

3. यदि $\cos A = \frac{4}{5}$ र $\sin B = \frac{12}{13}$ भए निम्न त्रिकोणमितीय अभिव्यञ्जकहरूको मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

   (a) $\cos A \sin B - \sin A \cos B$ (b) $\cos A \cos B + \sin A \sin B$

   (c) $\sin A \cos B - \cos A \sin B$ (d) $\cos A \cos B - \sin A \sin B$

   (e) $\frac{\tan A + \tan B}{1 - tanAtanB}$

4. (a) यदि $\cos A = \frac{m^2 - n^2}{m^2 + n^2}$ भए, $\cot A$ र $\sec A$ को मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

   (b) यदि $\cot\beta = \frac{p}{q}$ भए $\frac{p\cos\beta - q\sin\beta}{p\cos\beta + q\sin\beta} = \frac{p^2 - q^2}{p^2 + q^2}$ हुन्छ भनी प्रमाणित गर्नुहोस् ।

   (c) यदि $\sin\theta = \frac{x}{y}$ भए प्रमाणित गर्नुहोस् : $tan\theta = \frac{x}{\sqrt{y^2 - x^2}}$

   (d) यदि $\tan\alpha = \frac{2xy}{x^2 - y^2}$ भए $\sin\alpha = \frac{2xy}{x^2 + y^2}$ हुन्छ भनी प्रमाणित गर्नुहोस् ।

5.3 केही विशिष्ट कोणहरूको त्रिकोणमितीय अनुपात (Trigonometric Ratios of Some Special Angles)

निम्न प्रश्नहरूका बारेमा समूहमा छलफल गर्नुहोस् :

(a) एकाइ वृत्त भनेको के हो ?

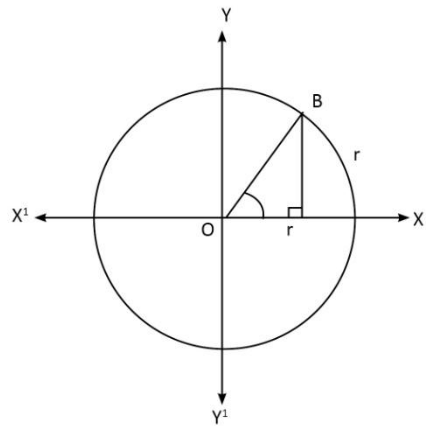
(b) परिक्रमी रेखाले प्रारम्भिक रेखासँग कस्तो अवस्थामा 0° र 90° को कोण बनाउँछ ?

(c) कस्तो त्रिभुजलाई समबाहु त्रिभुज भनिन्छ ?

(d) समबाहु त्रिभुजका प्रत्येक कोण कति डिग्रीका हुन्छन् ?

(e) समबाहु त्रिभुजको शीर्षकोणको अर्धक आधारमा के हुन्छ ?

(i) 0° र 90° का त्रिकोणमितीय अनुपातको मान



चित्रमा प्रारम्भिक रेखा OX मा परिक्रमी रेखा OP ले ∡POX बनाएको छ । PM⊥OX खिचौं । यदि OP रेखा OX सँग खप्टिन गयो भने ∡POX कति हुन्छ ? छलफल गर्नुहोस् ।

समकोणी ΔPMO मा यदि OP = OM भएको अवस्थामा ∡POX= 0° र PM = 0 हुन्छ ।

तब, $\sin 0° = \frac{PM}{OP} = \frac{O}{OP} = 0$

$\cos 0° = \frac{\text{OM}}{\text{OP}} = \frac{\text{OP}}{\text{OP}} = 1$

$\tan 0° \frac{\text{PM}}{\text{OM}} = \frac{\text{O}}{\text{OM}} = 0$

$\cot 0° = \frac{1}{\tan 0°} = \frac{1}{0} = \infty$

$\sec 0° = \frac{1}{cos0°} = \frac{1}{1} = 1$ र

$\text{cosec}0°= \text{cosec}0° = \frac{1}{sin0°} = \frac{1}{0} = \infty$

त्यस्तै, OP रेखा, OY सँग खप्टिदा ∡POX = ∡YOX =90° हुन्छ । OP = PM र OM = 0 हुन्छ ।

अब, समकोणी ΔPOM मा

$\sin 90°= \frac{PM}{OP} = \frac{OP}{OP} = 1$

$\cos 90° = \frac{OM}{OP} = \frac{O}{OP} = 0$

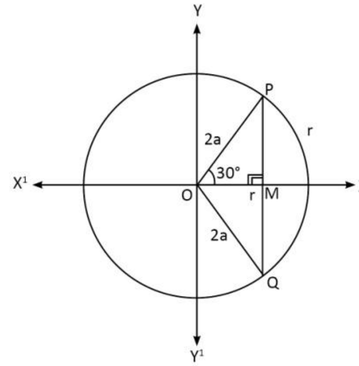
$\tan 90° = \frac{PM}{OM} = \frac{OP}{O} = \infty$

$\cot 90° = \frac{OM}{OP} = \frac{O}{OP} = O$

$\sec 90° = \frac{1}{cos90°} = \frac{1}{0} = \infty$

$\text{cosec}90° = \frac{1}{sin90°} = \frac{1}{1} = 1$

(ii) 30° र 60° का त्रिकोणमितीय अनुपात



चित्रमा प्रारम्भिक रेखा OX सँग परिक्रमी रेखा OP ले ∡POX = 30° बनाएको छ । OP को अर्धव्यास लिएर वृत्त बनाऔँ । PM⊥ OX खिचौँ र वृत्तको बिन्दु Q सम्म लम्ब्याऔँ । चित्रमा ∡QOM कति डिग्री हुन्छ । ΔOPQ कस्तो त्रिभुज बन्दछ ? छलफल गर्नुहोस्, यदि OP = OQ = 2a छ भने PM को मान कति हुन्छ ? पाइथागोरसको साध्य प्रयोग गरी OM को मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

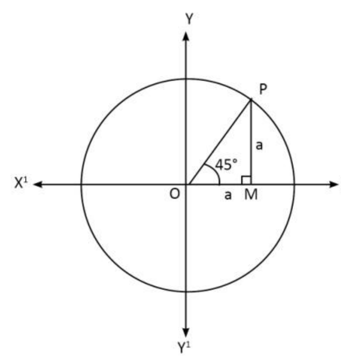
समकोण ΔOMP मा $\sin 30° = \frac{\text{PM}}{\text{OP}} = \frac{\text{a}}{\text{2a}} = \frac{1}{2}$

त्यस्तै, अन्य सबै त्रिकोणमितीय अनुपातहरूको मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

समकोणी ΔOMP मा $\cos 60° = \frac{PM}{OP} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}$

यसैगरी बाँकी त्रिकोणमितीय अनुपातहरूको मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

(iii) 45° को त्रिकोणमितीय अनुपातको मान



चित्रमा प्रारम्भिक रेखा OX सँग परिक्रमी रेखा OP ले बनाएको कोण ∡POX = 45° छ ।

PM ⊥OX खिचौँ । चित्रमा समकोणी ΔOMP मा ∡OPM को मान कति हुन्छ पत्ता लगाउनुहोस् । यस अवस्थामा ΔOMP कस्तो त्रिभुज हो ? के OM = PM हुन्छ ?

यदि OM = PM = a मान्ने हो भने OP को लम्बाइ कति हुन्छ ? पाइथागोरसको साध्य प्रयोग गरी प्रमाणित गर्नुहोस् ।

अब, $\sin 45° = \frac{\text{PM}}{\text{OP}} = \frac{\text{a}}{\text{a}\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

यसैगरी बाँकी सबै त्रिकोणमितीय अनुपातहरूको मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

तालिका : विशिष्ट कोणहरूको त्रिकोणमितीय अनुपात

अनुपात/कोण	0°	30°	45°	60°	90°
sin	0	$\frac{1}{2}$	$1/\sqrt{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$1/\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tan	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	∞
cosec	∞	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	1
sec	1	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{2}$	2	∞
cot	∞	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

उदाहरण 1

मान निकाल्नुहोस् : $\sin^2 45°. \operatorname{cosec}^2 30° - \sec^2 60°$

समाधान

यहाँ, $\sin^2 45°. \times \operatorname{cosec}^2 30° - \sec^2 60°$

$=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 \times (2)^2 - (2)^2$

$= \frac{1}{2} \times 4 - 4 = 2 - 4 = -2$

उदाहरण 2

प्रमाणित गर्नुहोस् : $\sin 60° \cos 30° + \cos 60° \sin 30° = \sin 90°$

समाधान

L.H.S $= \sin 60° \cos 30° + \cos 60° \sin 30°$

$= \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{3+1}{4} = \frac{4}{4} = 1$

R.H.S $= \sin 90° = 1$

L.H.S = RHS प्रमाणित भयो ।

उदाहरण 3

यदि $\alpha = 60°$, $\beta = 30°$ भए प्रमाणित गर्नुहोस् : $\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha \cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$

समाधान

यहाँ, $\alpha = 60°$

$\beta = 30°$

अब, LHS $= \sin(\alpha-\beta)$

$= \sin(60° - 30°)$

$= \sin 30° = \frac{1}{2}$

RHS $= \sin\alpha \cos\beta - \cos\alpha \sin\beta$

$= \sin 60°.\cos 30° - \cos 60°.\sin 30°$

$= \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$

$= \frac{3-1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

$\therefore$ LHS = RHS प्रमाणित भयो ।

अभ्यास 5.3

1. मान निकाल्नुहोस् :

(a) $\text{Sin}45° \cos 45° - \sin^2 30°$

(b) $\text{Cos}30° \cos 45° - \sin 30° \sin 45°$

(c) $2\sin 60° \sin 90° + \cos 60° \cos 0°$

(d) $\frac{\cos 30° + \sin 60°}{\cos 0° + \sin 30° + \cos 60°}$

(e) $\frac{\sin^2 45° - \sin^2 60°}{\cos 30° + \cos 45°}$

(f) $2\sin^2 30° - 3\cos^2 45° + \tan^2 60°$

(g) $3\tan^2 45° - \sin^2 60° - \frac{1}{4}\cot^2 30° + \frac{1}{4}\sec^2 45°$

(h) $4\sin^2 60° + 3\tan^2 30° - 8\sin 45° \cos 45°$

(i) $\text{Cot}^2 45° + \text{cosec}^2 45°$

(j) $\frac{\cos 60° - \sin 45°}{\sec 30°}$

2. $\pi^c = 180°$ भए मान पत्ता लगाउनुहोस् :

(a) $\text{Sin}^2\frac{\pi^c}{3} + tan^2\frac{\pi^c}{6} - \cos^2\frac{\pi^c}{2}$

(b) $\left(sin\frac{\pi^c}{6} + cos\frac{\pi^c}{6}\right)\left(sin\frac{\pi^c}{4} - cos\frac{\pi^c}{4}\right)$

(c) $sin\frac{\pi^c}{3}.cos\frac{\pi^c}{4} + cos\frac{\pi^c}{3}.sin\frac{\pi^c}{4}$

(d) $sin^2\frac{\pi}{4} + sin^2\frac{\pi}{6} + cos^2\frac{\pi}{4} + cos^2\frac{\pi}{2}$

(e) $\cos^2\frac{\pi}{6} + \cos^2\frac{\pi}{4} + \sin^2\frac{\pi}{4} + cos^2\frac{\pi}{3} + cos^2\frac{\pi}{2}$

(f) $\frac{tan^2\frac{\pi}{3}\, cosec\frac{\pi}{6} tan\frac{\pi}{4}}{sec^2\frac{\pi}{4}.sec\frac{\pi}{3}.sin\frac{\pi}{6} sin^2\frac{\pi}{2}}$

(g) $sec^2\frac{\pi}{4}\ .sec^2\frac{\pi}{3}\ (cosec\frac{\pi}{6} - cosec\frac{\pi}{2})$

(h) $cot^2\frac{\pi}{6} - 2cos^2\frac{\pi}{3} - \frac{3}{4}sin^2\frac{\pi}{4} - 4\sin^2\frac{\pi}{6}$

(i) $tan^2\frac{\pi}{6}.cosec^2\frac{\pi}{3}.\tan^3\frac{\pi}{4} + \sec^2\frac{\pi}{4}.\sec^2\frac{\pi}{3}.\sin\frac{\pi}{6}.sin^2\frac{\pi}{4}$

(j) $\cos\frac{\pi}{3}.cos\frac{\pi}{4} + sin\frac{\pi}{4}.sin\frac{\pi}{3}$

3. प्रमाणित गर्नुहोस् :

(a) $\sin^2 60° - \cos^2 60° = \frac{1}{2}$

(b) $2\sin30° \cos30° = \sin60°$

(c) $\frac{2tan30°}{1-tan^2 30°} = tan60°$

(d) $\frac{2tan30°}{1+tan^2 30°} = 2sin30°cos30°$

(e) $\sqrt{3}\tan 30° + \sqrt{2}\, sin45° = 2$

(f) $\tan^2 60° + 4\cos^2 45° + \cos^2 30° = 9$

(g) $\frac{1+\tan 30°}{1-\tan 30°} = \frac{1+\sin 60°}{1-\sin 30°}$

(h) $\frac{\sin 45°}{\cos 45°+\sin 45° \sin 30°} = \frac{2}{3}$

(i) $4\sin 30° \cos 60° \sin 90° = 1$

(j) $\frac{4}{3}\tan^2 30° + \sin^2 60° - 3\cos^2 30° + \frac{3}{4}\tan^2 60° - 2\tan^2 45° = \frac{25}{36}$

(k) $\frac{2\tan 60°}{1-\tan^2 60°} = -\sqrt{3}$

(l) $\cos 60° \cos 30° - \sin 60° \sin 30° = 0$

(m) $\frac{\text{cosec}\,30°+\text{cosec}\,60°+\text{cosec}\,90°}{\sec 0°+\sec 30°+\sec 60°} = 1$

(n) $\frac{\text{Sin}\,45°-\sin 30°}{\cos 45°+\cos 60°} = \frac{\text{Sec}\,45°-\tan 45°}{\text{cosec}\,45°+\cot 45°}$

4. x को मान पत्ता लगाउनुहोस् :

(a) $\tan^2 45° (-\text{cosec}60°) = x \cos45^0.\sin45°\cot60°$

(b) $3\sin60° + x.\cos30° \tan45° = x \cot 30°$

(c) $12x \tan^2 45° - 12 \sin^2 60° - 6\cot^2 30° + 4\sec^2 45° = 17$

(d) $\sin30° + 2\cot^2 30° + x \cos^2 30° = 8 + \tan^2 45° + \cos60°$

(e) $x + 3\tan^2 30° + 4\cos^2 30° = 2\sec^2 45° + 4 \sin^2 60°$

5. यदि $\theta = 30°$ भए प्रमाणित गर्नुहोस् :

(a) $\cos2\theta = \sin\theta$

(b) $\cos2\theta = 1\text{-}2\sin^2\theta$

(c) $\cos2\theta = \frac{1-tan^2\theta}{1+tan^2\theta}$

(d) $\sin2\theta = 2\text{Sin}\theta.\text{Cos}\theta$

(e) $\sin3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$

6. यदि $\alpha = 0°$, $\beta = 30°$, $\gamma = 45°$ र $\theta = 90°$ भए प्रमाणित गर्नुहोस् ।

(a) $\tan^2\alpha + \tan^2\beta + \tan^2\gamma + \sin^2\theta = \frac{7}{3}$

(b) $\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta)}{1-\tan\alpha.tan\beta}$

(c) $\cos(\theta - \beta) = \cos\theta \cos\beta + \sin\theta \sin\beta$

5.4 त्रिकोणमितीय अनुपातहरूका सर्वसमिकाहरू (Identities of Trigonometric Ratios)

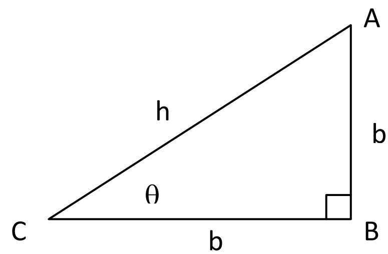
तलका प्रश्नहरूका बारेमा समूहमा छलफल गर्नुहोस् :

(a) कस्ता गणितीय वाक्य (Mathematical Statement) लाई सर्वसमिका भनिन्छ ?

(b) सर्वसमिका (Identity) र समीकरण (equation) बिच के फरक छ ?

(c) त्रिकोणमितीय अनुपातहरूका कुनै 2 ओटा सर्वसमिकाहरू बनाउनुहोस् ।

पाइथागोरस साध्यबाट प्राप्त हुने त्रिकोणमितीय सम्बन्ध
(Relation of Trigonometric Ratios from Pythagoras Theorem)



चित्रमा समकोणी ΔABC मा प्रसङ्गकोण ∠ACB = θ छ । सो कोणका लागि sinθ = $\frac{AB}{AC}$, cosθ = $\frac{BC}{AC}$ हुन्छ ।

पाइथागोरास साध्यबाट,

$AB^2 + BC^2 = AC^2$

अथवा, $\frac{AB^2+BC^2}{AC^2} = \frac{AC^2}{AC^2}$

अथवा, $\frac{AB^2}{AC^2} + \frac{AC^2}{AC^2}$

अथवा, $\frac{AB^2}{AC^2} + \frac{BC^2}{AC^2} = 1$

अथवा, $\left(\frac{AB}{AC}\right)^2 + \left(\frac{BC}{AC}\right)^2 = 1$

अथवा, $(\sin\theta)^2 + (\cos\theta)^2 = 1$

अथवा, $sin^2\theta + sin^2\theta = 1 - - - (i)$

सर्वसमिका (i) बाट,

$sin^2\theta = 1 - cos^2\theta$

$cos^2\theta = 1 - sin^2\theta$

फेरि, $sin\theta = \sqrt{1 - cos^2\theta}$

$cos\theta = \sqrt{1 - sin^2\theta}$

सर्वसमिका (i) लाई दुवैतर्फ $cos^2\theta$ ले भाग गर्दा

$\frac{sin^2\theta+cos^2\theta}{cos^2\theta} = \frac{1}{cos^2\theta}$

अथवा, $\frac{sin^2\theta}{cos^2\theta} + \frac{cos^2\theta}{cos^2\theta} = sec^2\theta$

अथवा, $tan^2\theta + 1 = sec^2\theta - - - (ii)$

सर्वसमिका (ii) बाट,

secθ = $\sqrt{tan^2\theta + 1}$

त्यस्तै, $tan^2\theta = sec^2\theta - 1$

र tanθ = $\sqrt{sec^2\theta - 1}$

त्यस्तैः सर्वसमिका (i) लाई दुवैतर्फ sin$^2\theta$ ले मात्र गर्दा, $\frac{sin^2\theta + cos^2\theta}{sin^2\theta} = \frac{1}{sin^2\theta}$

अथवा, $\frac{sin^2\theta}{sin^2\theta} + \frac{cos^2\theta}{sin^2\theta} = cosec^2\theta$

अथवा, $1 + cot^2\theta = \ cosce^2\theta$

फेरि, सर्वसमिका (iii) बाट

cosecθ =$\sqrt{1 + cos^2\theta}$

त्यस्तै, cot$^2\theta$ =cose$^2\theta$ - 1

र cotθ =$\sqrt{cosec^2\theta - 1}$

उदाहरण 1

प्रमाणित गर्नुहोस् : sinA secA = tanA

समाधान

यहाँ, LHS = sinA secA

= sinA.$\frac{1}{cosA}$

= $\frac{sinA}{cosA}$

= tanA = R.H.S प्रमाणित भयो ।

उदाहरण 2

प्रमाणित गर्नुहोस् : sec^{2}A – cosec^{2}A = tan^{2}A – cot^{2}A

समाधान

sec^{2}A – cosec^{2}A = tan^{2}A – cot^{2}A

L.H.S = sec^{2}A – cosec^{2}A

= 1 + tan^{2}A – (1+cot^{2}A)

= 1 + tan^{2}A – 1 – cot^{2}A

= tan^{2}A – cot^{2}A

= R.H.S प्रमाणित भयो ।

उदाहरण 3

प्रमाणित गर्नुहोस् : $\frac{1}{\text{cotA} + tanA} = sinAcosA$

समाधान

L.H.S = $\frac{1}{\text{cotA} + tanA}$

$= \frac{1}{\frac{\text{cosA}}{sinA} + \frac{sinA}{cosA}}$

$= \frac{1}{\frac{\cos^2\text{A}+\sin^2\text{A}}{sinAcosA}} = \frac{1}{\frac{1}{sinAcosA}}$

= sinA cosA

= R.H.S प्रमाणित भयो ।

उदाहरण 4

प्रमाणित गर्नुहोस् : $= \sqrt{\frac{1+sin\theta}{1-sin\theta}} = sec\theta + tan\theta$

समाधान

यहाँ, L.H.S = $\sqrt{\frac{1+sin\theta}{1-sin\theta}}$

$= \sqrt{\frac{(1+sin\theta)(1+sin\theta)}{(1-sin\theta)(1+sin\theta)}}$

$= \sqrt{\frac{(1+sin\theta)^2}{1-sin^2\theta}}$

$= \sqrt{\frac{(1+sin\theta)^2}{cos^2\theta}}$ $(\therefore\ 1 - sin^2\theta = cos^2\theta)$

$= \frac{1+sin\theta}{cos\theta} = \frac{1}{cos\theta} + \frac{sin\theta}{cos\theta}$

= $\sec\theta + \tan\theta$

= R.H.S प्रमाणित भयो ।

उदाहरण 5

प्रमाणित गर्नुहोस् : $\frac{sec\theta-1}{sec\theta+1} = (cot\theta - cosec\theta)^2$

समाधान

यहाँ, L,H.S $= \frac{\sec\theta-1}{\sec\theta+1}$

$= \frac{\sec\theta-1}{\sec\theta+1} \times \frac{\sec\theta-1}{\sec\theta-1}$

$= \frac{(\sec\theta-1)^2}{\sec^2\theta-1}$

$= \frac{(\sec\theta-1)^2}{\tan^2\theta} = \left(\frac{\frac{1}{cos\theta}-1}{\frac{sin\theta}{cos\theta}}\right)^2$

$= \left(\frac{\frac{1-\cos\theta}{\cos\theta}}{\frac{\sin\theta}{\cos\theta}}\right)^2$

$= \left(\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}\right)^2$

$= \left(\frac{1}{\sin\theta} - \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right)^2$

$= (\text{cosec}\theta - \cot\theta)^2$

$= (-\cot\theta + \text{cosec}\theta)^2$

$= [-(\cot\theta - \text{cosec}\theta)]^2$

$= (\cot\theta - \text{cosec}\,\theta)^2$

= RHS प्रमाणित भयो ।

उदाहरण 6

प्रमाणित गर्नुहोस् :$\frac{\cos A}{1-tanA} + \frac{\sin A}{1-cotA} = sinA + cosA$

समाधान

यहाँ, L.H.S. $= \frac{\cos A}{1-tanA} + \frac{\sin A}{1-cotA}$

$= \frac{\cos A}{1-\frac{sinA}{\cos A}} + \frac{\sin A}{1-\frac{cosA}{sinA}}$

$= \frac{\cos A}{\frac{\cos A-sinA}{\cos A}} + \frac{\sin A}{\frac{sinA-coSA}{sinA}}$

$= \frac{\cos^2 \text{A}}{\cos \text{A-sinA}} - \frac{\sin^2 \text{A}}{\text{cosA-sinA}}$

$= \frac{\cos^2 A-\sin^2 A}{\cos A-sinA}$

$= \frac{(cosA+sinA)(cosA-sinA)}{\cos A-sinA}$

= cosA + sinA

= sinA + cosA

= R.H.S प्रमाणित भयो ।

उदाहरण 7

प्रमाणित गर्नुहोस् : $\frac{1-cos^4A}{Sin^4A} = 1 + 2cot^2A$

समाधान

यहाँ L.H.S $= \frac{1-cos^4A}{Sin^4A}$

$= \frac{1^2-(cos^2A)^2}{Sin^2A.Sin^2A}$

$= \frac{(1+cos^2A)(1-cos^2A)}{Sin^2ASin^2A}$

$= \frac{(1+cos^2A)sin^2A}{Sin^2ASin^2A}$

$= \frac{(sin^2A+cos^2A+ cos^2A)}{Sin^2A}$

$= \frac{sin^2A+2cos^2A}{Sin^2A}$

$= \frac{sin^2A}{Sin^2A} + \frac{2cos^2A}{Sin^2A}$

$= 1 + 2cot^2A$

= R.H.S प्रमाणित भयो ।

उदाहरण 8

प्रमाणित गर्नुहोस् : $\frac{tanx+\sec x-1}{tanx-\sec x+1} = \frac{sinx+1}{cosx}$

समाधान

L.H.S $= \frac{tanx+\sec x-1}{tanx-\sec x+1}$

$= \frac{tanx+secx-(sec^2x-tan^2x)}{tanx-secx+1}$

$= \frac{tanx+\sec x-(\sec x+tanx)\ (\sec x-tanx)}{tanx-\sec x+1}$

$= \frac{(tanx+\sec x)(1-\sec x+tanx)}{1-\sec x+tanx}$

= tan$x$ + sec$x$

$= \frac{sinx}{cosx} + \frac{1}{cosx}$

$= \frac{sinx+1}{cosx}$

= R.H.S प्रमाणित भयो ।

उदाहरण 9

प्रमाणित गर्नुहोस् : $\frac{sinA}{secA+tanA-1}+\frac{cosA}{cosecA+cotA-1}=1$

समाधान

यहाँ L.H.S $= \frac{sinA}{secA+tanA-1}+\frac{cosA}{cosecA+cotA-1}$

$= \frac{sinA.cosecA+sinA.cotA-sinA+cosA.secA+cosA.tanA-cosA}{(secA+tanA-1)(cosecA+cotA-1)}$

$= \frac{1+cosA-sinA+1+sinA-cosA}{\left(\frac{1}{cosA}+\frac{sinA}{cosA}-1\right)(\frac{1}{sinA}+\frac{cosA}{sinA}-1)}$

$= \frac{2}{\left(\frac{1+sinA-cosA}{cosA}\right)(\frac{1+cosA-sinA}{sinA})}$

$= \frac{2sinA.\ cosA}{\{1+(sinA-cosA)\}\{1-(sinA-cosA)\}}$

$= \frac{2sinA.\ cosA}{1-(sinA-cos)^2}$

$= \frac{2sinA.\ cosA}{1-(sin^2A+cos^2A-2sinAcosA)}$

$= \frac{2sinA.\ cosA}{1-(1-2sinA.cosA)}$

$= \frac{2sinA.\ cosA}{1-1+2sinA.cosA} = \frac{2sinA.\ cosA}{2sinA.cosA} = 1$

= R.H.S. प्रमाणित भयो ।

उदाहरण 10

प्रमाणित गर्नुहोस् : $(2-\cos^2A)(1+2\cot^2A) = (2+\cot^2A)(2-\sin^2A)$

समाधान

यहाँ, L.H.S. $= (2-\cos^2A)(1+2\cot^2A)$

$=(2-cos^2A)\left[1+\frac{2\cos^2A}{sin^2A}\right]$

$= (2-cos^2A)\left[\frac{sin^2A+2cos^2A}{sin^2A}\right]$

$= (2-cos^2A)\left[\frac{sin^2A+2(1-sin^2A)}{sin^2A}\right]$

$= (2-cos^2A)\left[\frac{sin^2A+2-2sin^2A}{sin^2A}\right]$

$= \left(\frac{2-cos^2A}{sin^2A}\right)(2-sin^2A)$

$= \left[\frac{2-(1-sin^2A)}{sin^2A}\right](2-sin^2A)$

$= \left(\frac{2-1+sin^2A}{sin^2A}\right)\ (2 - sin^2A)$

$= \left(\frac{1+sin^2A}{sin^2A}\right)\ (2 - sin^2A)$

$= \left(\frac{1}{sin^2A} + \frac{sin^2A}{sin^2A}\right)(2 - sin^2A)$

$= (cosec^2A + 1)(2 - sin^2A)$

= $(1 + \cot^2A + 1)\ (2 - \sin^2A)$

$= (2 + cot^2A)(2 - sin^2A)$

= R.H.S प्रमाणित भयो ।

उदाहरण 11

प्रमाणित गर्नुहोस् : $\frac{1}{secB+\tan B} - \frac{1}{cosB} = \frac{1}{cosB} - \frac{1}{secB-\tan B}$

अथवा, $\frac{1}{secB+\tan B} + \frac{1}{secB-\tan B} = \frac{1}{cosB} + \frac{1}{cosB}$

समाधान

L.H.S = $\frac{1}{\text{secB+tan B}} + \frac{1}{\text{secB}-\text{tan B}}$

$= \frac{secB-\tan B+secB+\tan B}{(secB+\tan B)(secB-\tan B)}$

$= \frac{2secB}{sec^2B-tan^2B}$

$= \frac{2secB}{1}$

= 2secB = $\frac{2}{cosB} = \frac{1+1}{cosB} = \frac{1}{cosB} + \frac{1}{cosB}$

= RHS प्रमाणित भयो ।

अभ्यास 5.4

1. गुणन गर्नुहोस् :

(a) $(\sin A+\sin B)(\sin A-\sin B)$ (b) $(1-\cos\theta)-(1+\cos\theta)$

(c) $(1+\sin\theta)\ (1-\sin\theta)$ (d) $(1+\cot^2A)\ (1-\cot^2A)$

(e) $(1+\sin\theta)\ (1-\sin\theta)\ (1+\sin^2\theta)$ (f) $(1+\tan\theta)\ (1-\tan\theta)(1+\tan^2\theta)$

2. खण्डीकरण गर्नुहोस् :

(a) $\cos^2A - \sin^2A$ (b) $\sec^2A - \text{cosec}^2A$

(c) $\cos^2A+\sin^2A.\cos^2A$ (d) $\tan^3\theta-\cot^3\theta$

(e) $Sec^4\theta$ - $cosec^4\theta$ (f) $\sin^2x + 3\sin x + 2$

3. प्रमाणित गर्नुहोस् :

(a) cotA sinA = cosA (b) cosA cosecA =cotA

(c) secθ sinθ cotθ = 1 (d) tanθ cosθ = sinθ

(e) $\frac{sin\theta \text{ cosec}\theta}{\sec\theta} = cos\theta$ (f) $\frac{tan\theta \cot\theta}{\sec\theta \text{ cosec}\theta} = sin\theta cos\theta$

4. प्रमाणित गर्नुहोस् :

(a) $\cos^2\theta - \cos^2\theta.\sin^2\theta = \cos^4\theta$

(b) $(1-\cos^2\theta)(1+\tan^2\theta) = \tan^2\theta$

(c) $(1 + \cot^2A)(1-\sin^2A) = \cot^2A$

(d) $Sin^2\theta + \sin^2\theta.\cot^2\theta = 1$

(e) $\sin\theta(1+ \cot^2\theta) = cosec\theta$

(f) $\cos A(1+\tan^2A) = \sec A$

(g) $(\sin x - \cos x)^2 = 1 - 2\sin x \cos x$

(h) $(1-\sin^2A)\,cosec^2A = \cot^2A$

(i) $\cos\theta\sqrt{1 + cot^2\theta} = \sqrt{cosec^2\theta - 1}$

(j) $\cos\theta \,.\, cosec\theta\sqrt{sec^2\theta - 1} = 1$

5. प्रमाणित गर्नुहोस् :

(a) $\frac{secA}{cosA} - \frac{tanA}{cotA} = 1$ (b) $\frac{1}{cos^2A} - \frac{1}{cot^2A} = 1$

(c) $\frac{cosA}{1-tanA} + \frac{sinA}{1-cotA} = sinA + cosA$ (d) $\frac{1}{sec\theta-tan\theta} = sec\theta + tan\theta$

(e) $\frac{1-tanA}{1+tanA} = \frac{cotA-1}{cotA+1}$ (f) $\frac{1-tan^2A}{1+tan^2A} = \frac{cos^2A-1}{cos^2A+1}$

(g) $\frac{1}{1-sin\propto} - \frac{1}{1+sin\propto} = 2 + sin \propto sec^2\alpha$ (h) $\frac{sin^3\propto + cos^3\propto}{cos\propto + sin\propto} = 1 - sin \propto cos \propto$

(i) $\frac{cos\propto + sin\propto}{cos\propto - sin\propto} = \frac{1 + tan\propto}{1-tan\propto}$ (j) $\frac{cot^2\beta}{1+cot^2\beta} = cos^2\beta$

(k) $\frac{tan^2A-cot^2A}{1+cot^2A} = \frac{sin^2A-cos^2A}{cos^2A}$ (l) $\frac{sinx + cosx}{cos^2A-sin^2x} = \frac{tanx}{1-tanx}$

(m) $\frac{sinA + sinB}{cosA + cosB} + \frac{cosA - cosB}{sinA - sinB} = 0$

(n) $\frac{sinA + cosA}{sinA - cosA} + \frac{sinA - cosA}{sinA + cosA} = \frac{2}{sin^2A - cos^2A}$ (0) $\frac{tan\theta}{\sqrt{1+tan^2\theta}} = sin\theta$

6. प्रमाणित गर्नुहोस् :

(a) $\sqrt{\frac{1-cos\theta}{1+cos\theta}} = cos\theta - cot\theta$

(b) $\sqrt{\frac{1-cosA}{1+cosA}} = \frac{sinA}{1+cosA}$

(c) $\sqrt{\frac{1-sin\theta}{1+sin\theta}} = sec\theta - tan\theta$

(d) $\sqrt{\frac{1+cos\theta}{1-cos\theta}} = coses\theta + cot\theta$

(e) $\sqrt{\frac{1+sin\theta}{1-sin\theta}} + \sqrt{\frac{1-sin\theta}{1+sin\theta}} = 2sec\theta$

(f) $\sqrt{\frac{1+tan^2A}{1+cot^2A}} + \frac{1+tanA}{cotA-1}$

7. प्रमाणित गर्नुहोस् :

(a) $\frac{secA-tanA+1}{secA-tanA-1} = \frac{1+secA+tanA}{1-secA-tanA}$

(b) $\frac{1-cosecA+cotA}{1+cosecA-cotA} = \frac{cosecA + cotA-1}{cosecA + cotA +1}$

(c) $\frac{cosecA + cotA-1}{1-cosecA + cotA} = cosecA + cotA = \frac{1+cosA}{sinA}$

(d) $\frac{cosA - sinA +1}{cosA + sinA-1} = \frac{1+cosA}{sinA}$

(e) $\frac{cosA - sinA +1}{cosA + sinA+1} = \frac{1-sinA}{cosA}$

(f) $\frac{sin\theta - cos\theta +1}{sin\theta + cos\theta-1} = \frac{1+sin\theta - cos\theta}{1-sin\theta+ cos\theta} = 2(1 + cosec\theta)$

8. प्रमाणित गर्नुहोस् :

(a) $\frac{1}{sinA} - \frac{1}{cosecA + cotA} = \frac{1}{cosecA-cotA} - \frac{1}{sinA}$

(b) $(3-4\sin^2\theta).(\sec^2\theta-4\tan^2\theta)=(3-\tan^2\theta).(1-4\sin^2\theta)$

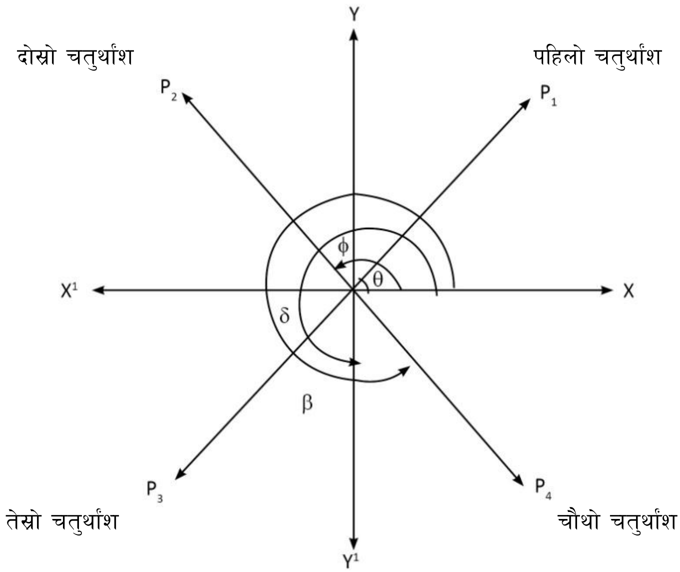
(c) $(3-4\sin^2\theta).\ (1-3\tan^2A)= (3-\tan^2A) = (4\cos^2A-3)$

(d) $(3-4\cos^2A).(\mathrm{cosec}^2A - 4\cot^2A) = (3 - \cot^2A).\ (1- 4\cos^2A)$

(e) $\sec^4A\ (1-\sin^4A) - \tan^2A = 1$

(f) $\frac{tan^2A}{tanA-1} - \frac{cotA}{1-tanA} = 1 + secAcosecA$

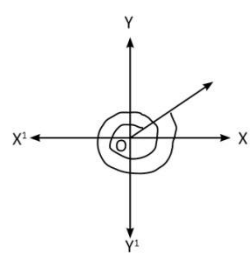
5.5 कुनै कोणको त्रिकोणमितीय अनुपात (Trigonometric Ratios of any angle)



माथिका चित्रमा रेखाहरू XX^1. र YY^1 बिन्दु 0 मा परस्पर लम्ब भई काटिएका छन् । OX लाई प्रारम्भिक रेखा मानी परिक्रमी रेखालाई घडीको विपरीत दिशामा घुमाउँदा अवस्थाहरू OP_1, OP_2, OP_3 र OP_4 ले धनात्मक कोणहरू क्रमशः पहिलो दोस्रो, तेस्रो र चौथो चतुर्थांशमा परेका छन् । यी प्रत्येक अवस्थामा ती कोणहरूका त्रिकोणमितीय मानहरूमा पर्ने असरबारे समूहमा छलफल गर्नुहोस् ।

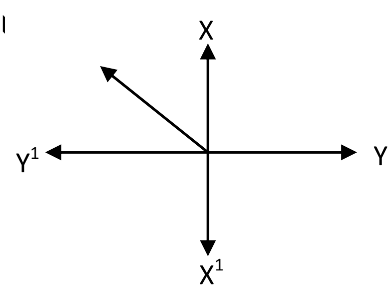
के हामीले बनाउन सक्ने सबै कोणहरू ती चतुर्थांशमा पर्दछन् ?

उदाहरणका लागि : $750° = 2 \times 360° + 30°$ पहिलो चतुर्थांशमा पर्दछ ।



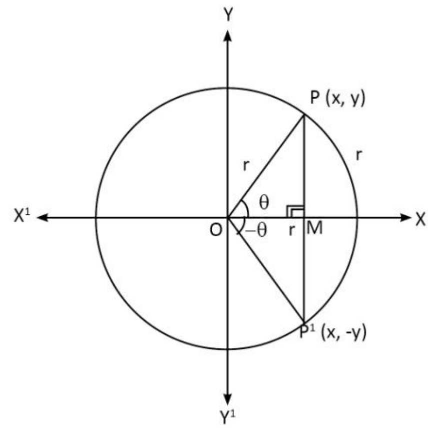
त्यस्तै $1235° = 3 \times 360° + 155°$ दोस्रो चतुर्थांशमा पर्दछ ।

यसरी जुनसुकै कोण लिनुहोस् त्यो कोण कुनै न कुनै चतुर्थांशमा पर्दछ ।



(क) **ऋणात्मक कोण (-θ) को त्रिकोणमितीय अनुपात (Trigonometric ratios of Negative angle (-θ))**

मानौँ सँगैको चित्रमा प्रारम्भिक रेखा OX सँग परिक्रमी रेखा OP ले बनाएको ∠POX = θ र P को निर्देशाङ्क P(x, y) छ । OP = r अर्धव्यास लिएर वृत्त खिचौँ । PM ⊥ OX खिचौँ र PM लाई लम्ब्याउँदा वृत्तको बिन्दु P' मा काट्छ र P' को निर्देशाङ्क P(x, -y) हुन्छ र OP' ले OX सँग बनाएको ∠P'OX = -θ हुन्छ ।



समकोणी त्रिभुज PMO मा $\sin\theta = \frac{y}{r}$ र $\cos\theta = \frac{x}{r}$ हुन्छ ।

अब, $\sin(-\theta) = \frac{P'M}{OP'} = \frac{-PM}{OP} = \frac{-y}{r} = -\sin\theta$

$\cos(-\theta) = \frac{OM}{OP'} = \frac{OM}{OP} = \frac{x}{r} = \cos\theta$

$\tan(-\theta) = \frac{\sin(-\theta)}{\cos(-\theta)} = \frac{-\sin\theta}{\cos\theta} = -\tan\theta$

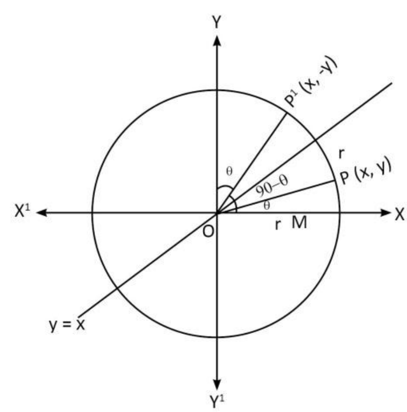
$\cot(-\theta) = \frac{1}{\tan(-\theta)} = \frac{1}{-\tan\theta} = \frac{-1}{\tan\theta} = -\cot\theta$

$\sec(-\theta) = \frac{1}{\cos(-\theta)} = \frac{1}{\cos\theta} = \sec\theta$

र $\text{cosec}(-\theta) = \frac{1}{\sin(-\theta)} = \frac{1}{-\sin\theta} = \frac{-1}{\sin\theta} = -\text{cosec}\theta$

(ख) **(90° - θ) को त्रिकोणमितीय अनुपात (Trigonometric Ratio of (90° - θ))**

सँगैको चित्रमा, प्रारम्भिक रेखा OX मा परिक्रमी रेखा OP ले बनाएको कोण ∠POX = θ छ । OP = r को अर्धव्यास लिएर एउटा वृत्त बनाऔँ । बिन्दु P (x,y) लाई y = x को रेखामा परावर्तन गर्दा प्राप्त हुने प्रतिबिम्ब P' को निर्देशाङ्क (y, x) हुन्छ र ∠P'OY =θ छ । चित्रमा, ∠P'OX = 90° - θ हुन्छ ।



अब, $\sin(90° - \theta) = \sin \angle P'OX = \frac{P' \text{ को y - निर्देशाङ्क}}{OP'}$

$= \frac{x}{OP} = \frac{x}{r}$

$= \cos\theta$

पुनः $\cos(90° - \theta) = \cos\angle P'OX = \frac{P'}{OP'}$ को x – निर्देशाङ्क

$= \frac{y}{OP} = \frac{y}{r} = \sin\theta$

अब, tan (90°- θ) $= \frac{\sin(90°-\theta)}{\cos(90°-\theta)}$

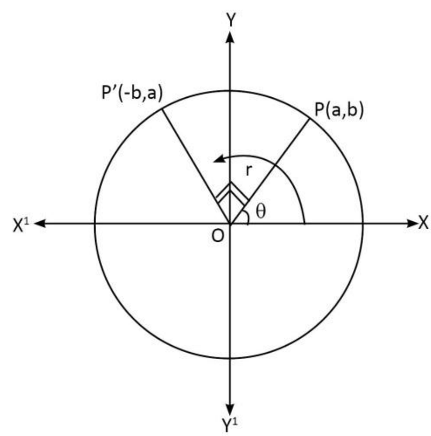
$= \frac{cos\theta}{sin\theta}$

= cotθ

यसैगरी, sec(90°- θ) = $\frac{1}{\cos(90°-\theta)} = \frac{1}{sin\theta} = cosec\theta$

र $\text{cosec}(90° - \theta) = \frac{1}{\sin(90°-\theta)} = \frac{1}{cos\theta} = sec\theta$

(ग) **$(90° + \theta)$ को त्रिकोणमितीय अनुपात (Trigonometric Ratio of $(90° + \theta)$)**



सँगैको चित्रमा प्रारम्भिक रेखा OX सँग परिक्रमी रेखा OP ले बनाएको कोण ∠POX = θ छ । मानौं P को निर्देशाङ्क (a, b) छ । r = OP अर्धव्यास लिएर एउटा वृत्त खिचौं । बिन्दु P(a,b) लाई केन्द्र O बाट धनात्मक दिशामा 90° को कोणले परिक्रमा गर्दा प्राप्त प्रतिबिम्ब P' को निर्देशाङ्क P' (-b, a) र ∠P'OX = 90° + θ हुन्छ ।

अब, sin (90° +θ) = sin ∡P'Ox

$= \frac{\text{P}' \text{ को y निर्देशाङ्क}}{\text{OP}'}$

$= \frac{a}{OP'} = \frac{a}{r}$

= cos θ

पुनः cos (90° +θ) = cos ∡P'OX

$= \frac{\text{P}'}{OP'}$ को y – निर्देशाङ्क

$= \frac{-\text{b}}{\text{op}'} = \frac{-\text{b}}{\text{OP}} = \frac{-b}{r}$

= -sinθ

अब, tan (90° +θ) $= \frac{\sin(90°+\theta)}{\cos(90°+\theta)}$

$= \frac{\cos\theta}{-\sin\theta} = \frac{-\cos\theta}{\sin\theta}$

= - cotθ

cot(90° +θ) = $\frac{1}{\tan(90°+\theta)} = \frac{1}{-\cot\theta} = -\tan\theta$

यसैगरी, sec(90° +θ) = $\frac{1}{\cos(90°+\theta)} = \frac{1}{-\sin\theta} = \frac{-1}{\sin\theta} = -\text{cosec}\theta$

र $\text{cosec}(90° + \theta) = \frac{1}{\sin(90°+\theta)} = \frac{1}{cos\theta} = sec\theta$

(घ) **(180° -θ) को त्रिकोणमितीय अनुपात (Trigonometric Ratio of (180° -θ))**

यहाँ, sin (180° - θ) = sin {90° + (90° -θ)} र cos(180°- θ) = cos{90° + 90° - θ)}

= cos (90° -θ) = -sin(90° - θ)

= sinθ = - cosθ

पुन : sec(180°- θ)

= $\frac{1}{\cos(180°-\theta)}$ = $\frac{1}{-\cos\theta}$ = -secθ

र cosec(190° - θ)

= $\frac{1}{\sin(180°-\theta)}$ = $\frac{1}{\sin\theta}$ = cosecθ

यसैगरी, tan (180° - θ) = $\frac{\sin(180°-\theta)}{\cos(180°-\theta)} = \frac{sin\theta}{-cos\theta} = -tan\theta$

पुन : cot (180° -θ)= $\frac{1}{-\tan(180°-\theta)} = \frac{1}{-tan\theta} = -cot\theta$

(ङ) **(180 +θ) को त्रिकोणमितीय अनुपात (Trigonometric ratios of (180° + θ)**

यहाँ, sin (180° + θ) = sin {90° + (90° + θ)}

= cos (90° + θ)

= -sinθ

cos (180° + θ) = cos {90° + (90° + θ)}

= -sin (90° +θ)

= -co θ

पुनः tan (180° +θ) = tan {90° +(90° + θ)}

= - cot (90° +θ)

= - (-tanθ)

= tanθ

यसैगरी, cot (180° +θ) = $\frac{1}{\tan(180°+\theta)} = \frac{1}{tan\theta} = cot\theta$

sec (180° +θ) = $\frac{1}{\cos(180°+\theta)} = \frac{1}{-cos\theta} = -sec\theta$

र cosec (180° +θ) = $\frac{1}{\sin(180°+\theta)} = \frac{1}{-sin\theta} = -cosec\theta$

(च) **$(270° – \theta)$ को त्रिकोणमितीय अनुपात (Trigonometric Ratio of $(270° -\theta)$**

यहाँ, $\sin(270° -\theta) = \sin\{180° + (90° - \theta)\}$

$= -\sin(90° - \theta)$

$= -\cos\theta$

$\cos(270° -\theta) = \cos\{180° + (90° - \theta)\}$

$= -\cos(90° - \theta)$

$= -\sin\theta$

पुनः $\tan(270° -\theta) = \frac{\sin(270°-\theta)}{\cos(270°-\theta)} = \frac{-\cos\theta}{-\sin\theta} = \cot\theta$

$\cot(270° -\theta) = \frac{1}{\tan(270°-\theta)} = \frac{1}{\cot\theta} = \tan\theta$

यसैगरी, $\sec(270° -\theta) = \frac{1}{\cos(270°-\theta)} = \frac{1}{-sin\theta} = -cosec\theta$

$cosec(270° -\theta) = \frac{1}{\sin(270°-\theta)} = \frac{1}{-cos\theta} = -sec\theta$

(छ) **$(270° + \theta)$ को त्रिकोणमितीय अनुपात (Trigonometric ratios of $(270° +\theta)$**

यहाँ, $\sin(270° + \theta) = \sin\{180° + (90° + \theta)\}$

$= -\sin(90° + \theta) = -\cos\theta$

$\cos(270° + \theta) = \cos\{180° + (90° + \theta)\}$

$= -\cos(90° + \theta)$

$= -(-\sin\theta) = \sin\theta$

पुन : $\tan(270° + \theta) = \frac{\sin(270°+\theta)}{\cos(270°+\theta)} = \frac{-cos\theta}{sin\theta} = -cot\theta$

$\cot(270° + \theta) = \frac{1}{\tan(270°+\theta)} = \frac{1}{-cot\theta} = -tan\theta$

यसैगरी, $\sec(270° + \theta) = \frac{1}{\cos(270°+\theta)} = \frac{1}{sin\theta} = cosec\theta$

$cosec(270° + \theta) = \frac{1}{\sin(270°+\theta)} = \frac{1}{-\cos\theta} = -\sec\theta$

(ज) **$(360° -\theta)$ को त्रिकोणमितीय अनुपात (Trigonometric ratios of $(360° -\theta)$)**

यहाँ, $\sin(360°-\theta) = \sin\{270° + (90°-\theta)\}$

$= -\cos(90° -\theta)$

$= -\sin\theta$

$\cos(360° - \theta) = \cos\{270° + (90° - \theta)\}$

$= \sin(90° - \theta)$

$= \cos\theta$

पुनः $\tan(360° - \theta) = \tan(270° + (90° - \theta)$

$= -\cot(90° - \theta)$

$= = -\tan\theta$

$\cot(360° - \theta) = \frac{1}{\tan(360°-\theta)} = \frac{1}{tan\theta} = -cot\theta$

यसैगरी, $\sec(360° - \theta) = \frac{1}{\cos(360°-\theta)} = \frac{1}{cos\theta} = sec\theta$

$\text{cosec}(360° - \theta) = \frac{1}{\sin(360°-\theta)} = \frac{1}{-sin\theta} = -cose\theta$

(भ) **(360° + θ) को त्रिकोणमितीय अनुपात**

(360° + θ) को त्रिकोणमितीय अनुपात कसरी निकाल्न सकिन्छ ? छलफल गरी निष्कर्ष लेख्नुहोस् ।

उदाहरण 1

मान निकाल्नुहोस् :

(i) $\cos 150° . \sin 120° + \sin^2 150° + \cos^2 120°$

(ii) $\cos\frac{\pi}{8} + cos\,\frac{3\pi}{8} + cos\,\frac{5\pi}{8} + cos\,\frac{7\pi}{8}$

समाधान

(i) $\text{Cos } 150° . \sin 120° + \sin^2 150° + \cos^2 120°$

$= \cos(90° + 60°) \sin(90° + 30°) + \sin^2(90° + 60°) + \cos^2(90° + 30°)$

$= \sin 60° . \cos 30° + \cos^2 60° + \sin^2 30°$

$= \frac{\sqrt{3}}{2} . \frac{\sqrt{3}}{2} + (\frac{1}{2})^2 + (\frac{1}{2})^2$

$= \frac{3}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{5}{4} = 1\frac{1}{4}$

(ii) $cos\,\frac{\pi}{8} + cos\,\frac{3\pi}{8} + cos\,\frac{5\pi}{8} + cos\,\frac{7\pi}{8}$

$= \cos(\pi - \frac{7\pi}{8}) + \cos(\pi - \frac{5\pi}{8}) + cos\,\frac{5\pi}{8} + \cos(\frac{7\pi}{8})$

$= -\cos\left(\frac{7\pi}{8}\right) - \cos(\frac{5\pi}{8}) + cos\,\frac{5\pi}{8} + \cos\frac{7\pi}{8}$

$= 0$

उदाहरण 2

सरल गर्नुहोस् :

(i) $\frac{\sin(90°+\theta).\cos(-\theta).\cot(180°-\theta)}{\cos(360°-\theta).\cos(180°+\theta).tan(90°-\theta)}$

(ii) $\frac{\tan(90°+\theta).\sec(270°-\theta).\sin(-\theta)}{\cos(180°+\theta).\cos(-\theta)}$

समाधान

(i) $\frac{\sin(90°+\theta).\cos(-\theta).\cot(180°-\theta)}{\cos(360°-\theta).\cos(180°+\theta).\tan(90°-\theta)}$

$= \frac{cos\theta cos\theta(-cot\theta)}{cos\theta(-cos\theta)cot\theta} = 1$

(ii) $\frac{\tan(90°+\theta).\sec(270°-\theta).\sin(-\theta)}{\cos(180°+\theta).\ cos(-\theta)}$

$= \frac{(-cot\theta).\ (-\operatorname{cosec}\theta.(-sin\theta)}{(-\cos\theta).\ cos\theta}$

$= \frac{\frac{cos\theta}{sin\theta}.\ \frac{1}{sin\theta}.sin\theta}{cos\theta.cos\theta} = \frac{1}{sin\theta cos\theta} = \frac{1}{sin\theta}.\frac{1}{cos\theta}$

$= \operatorname{cosec}\theta \sec\theta$

उदाहरण 3

प्रमाणित गर्नुहोस् :

(i) sin65° +cos35° = cos25° + sin55°

(ii) cos240° . cos120° – sin220°. cos150° = 1

समाधान

(i) sin65° +cos35° = cos25° + sin 55°

L.H.S = sin65° + cos35°

= sin (90° - 25°) + cos (90° - 55°)

= cos 25° + sin55°

= R.H.S प्रमाणित भयो ।

(ii) cos240°. cos 120°– sin120°. cos150° = 1

L.H.S = cos240°. cos120° – sin120°.cos150°

= cos(180° + 60°). cos (90° + 30°) – sin(90° +30°) cos(90°+60°)

= - cos60°.(-sin30°) – cos 30° . (-cos60°)

$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2}$

$= \frac{1+3}{4} = \frac{4}{4} = 1$

= R.H.S प्रमाणित भयो ।

उदाहरण 4

x को मान निकाल्नुहोस् :

$\tan^2 135° - \sin^2 60° = x \sin 135°. \cos 45°. \tan 60°$

समाधान

यहाँ, $\tan^2 135° - \sin^2 60° = x \sin 135°. \cos 45°. \tan 60°$

अथवा, $\tan^2(90° + 45°) - \sin^2 60° = x.\sin(90° + 45°).\cos 45°. \tan 60°$

अथवा, $\cot^2 45° - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = x. cos45°. \frac{1}{\sqrt{2}} \times \sqrt{3}$

अथवा, $(1)^2 - \frac{3}{4} = \frac{x\sqrt{3}}{2}$

अथवा, $1 - \frac{3}{4} = x. \frac{\sqrt{3}}{2}$

अथवा, $\frac{1}{4} = x \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore \ x = \frac{1}{2\sqrt{3}}$

अभ्यास 5.5

1. मान निकाल्नुहोस् :

   (a) $\cos 870°$ (b) $\sin 1230°$ (c) $\text{cosec}(-1200°)$

   (d) $\tan\left(\frac{19\pi}{3}\right)$ (e) $\sin\left(\frac{-5\pi}{3}\right)$ (f) $\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)$

   (g) $\sin^2\left(\frac{\pi}{6}\right) + cos^2\left(\frac{\pi}{3}\right) - tan^2(\frac{\pi}{4})$

   (h) $\sin^2\left(\frac{7\pi}{8}\right) + sin^2\left(\frac{5\pi}{89}\right) - sin^2\left(\frac{3\pi}{8}\right) + sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right)$

   (i) $sin20° + cos40° + cos140° + cos160°$

   (j) $sin^2 180° + sin^2 150° + sin^2 135° + sin^2 120° + sin^2 90°$

   (k) $sin^2 120° - cos^2 120° - sin^2 135° - tan^2 150°$

   (l) $2cos^2 135° + sin^2 150° + \frac{1}{2}.cos^2 180° + tan^2 135°$

   (m) $sin^2 135° + cos^2 150° + tan^2 120° + cos180° + tan135°$

(n) $sin^2 45° + cos^2 150° + tan^2 120° + cos 180° + tan 135°$

(o) $cos^2 \frac{\pi}{16} + cos^2 \frac{3\pi}{16} + cos^2 \frac{5\pi}{16} + cos^2 \frac{7\pi}{16}$

(p) sin(-690°) cos (-300°) + cos (-750°) sin (-240°)

(q) tan (315°).cot (-405°) + cot (495°). (-tan 585°)

2. सरल गर्नुहोस् :

(a) $\frac{\sin(90°+\theta) cosec(90°+\theta)}{cos(-\theta)\ cot(90°+\theta)}$

(b) $\frac{\cos(90°-\theta) cot(90°+\theta).cos(180°-\theta)}{tan(180°-\theta) tan(90°-\theta).cos(90°+\theta)}$

(c) $\frac{\tan(180°-\theta) cot(90°-\theta) cos(360°-\theta)}{tan(180°+\theta) tan(90°+\theta) sin(-\theta)}$

(d) $\frac{\sin(180°-\theta)}{sin(90°+\theta)} \times \frac{\tan(90°-\theta)}{cos(180°+\theta)} \times \frac{\sec(90°+\theta)}{cot(180°+\theta)}$

(e) $\frac{\cos(270°-A)\sec(180°-\theta)\sin(270°+A)}{cos(90°+A).\cos(180°-A).\sin(270°-A)}$

(f) $\frac{\cos(90°+\theta)\sec(-\theta)\ \tan(180°-\theta)}{sec(360°-\theta) sin(180°+\theta) cot(90°-\theta)}$

(g) $\frac{\sin(-\theta)\ \tan(180°+\theta)\ \sin(180°+\theta)\sec(270°+\theta)}{\sin(360°-\theta)\ \cos(270°-\theta)\ \mathrm{cosec}(180°-\theta)\cot(360°-\theta)}$

(h) $\frac{\cos(2\pi+\theta)\ \mathrm{cosec}(4\pi+\theta)\ \tan\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)}{\sec\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right) cos\theta\ \cot(\pi+\theta)}$

(i) $\frac{\sec(\pi-\theta)\ \mathrm{cosec}(2\pi+\theta)\ \tan(\pi+\theta)}{\sin(2\pi-\theta)\ cot\theta(\frac{\pi}{2}+\theta) coses(\frac{\pi}{2}+\theta)}$

(j) $\frac{\sin(\pi-\theta)\ \cos(\pi-\theta)\ \tan(\pi+\theta)}{\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\theta\right) sin(\frac{\pi}{2}+\theta) cot(\frac{\pi}{2}+\theta)}$

3. प्रमाणित गर्नुहोस् :

(a) tan 9°. tan27° = cot63° cot 81°

(b) cos25°. cos65° – sin25°. sin65° = 0

(c) tan 32° + cot 53° – cosec 80° = tan 37° + cot 58° – sec10°

(d) sin 81° + sec54° + tan 18° = cos9° +cos27° + cosec36° + cot72°

(e) sin 90°.sin27° + sin 63°. Sin81° = cos9°. cos27° cos63° cos81°

(f) tan 9° . tan27° . tan 45° = tan63° . tan81° = 1

(g) cos24°.cos120° – sin120° cos150° = 1

(h) cos240°. Sin300° –sin330° cos300° =$\frac{1+\sqrt{3}}{4}$

(i) cos120°.sin150° +cos330°.sin330° =-1

(j) sin420°. Cos390° + cos (-300°) sin (-330°) =1

(k) cot θ+ $\cot\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = cosec\theta - cosec\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$

(l) $\sin 2\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right).cosec\theta - tan^2\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\sin\theta = 0$

(m) $\sin\theta sec\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) - cosec\theta - cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = 0$

(n) $\cos^3\frac{\pi}{8} + cos^3\frac{3\pi}{8} + cos^3\frac{5\pi}{8} + \cos^2\frac{7\pi}{8} = 0$

4. x को मान निकाल्नुहोस् :

(a) cosec (90° +θ) + x.cosθ. cot(90° + θ) = sin (90° +θ)

(b) $x$cot (90° +θ) + tan(90° +θ) sinθ+ cosec (90° +θ) = 0

(c) $\tan^2 135°$ - $cosec^2 60°$ = $x$cos(180°-45°) sin 45°.cot 60°

(d) 3sin 420° + x.cos120° tan 225° = x cot 120°

(e) 2cot 120° – $x$sin120° cos 180° = tan 150°

(f) tan(180° - θ) cot (90° +θ) + x cos (90° +θ). Cos (90° -θ) = sinθ sin(180° -θ)

(g) $x$cotα tan (90° + α) = tan (90°+ α) cot (180° - α) + $x$sec (90° + α) cosecα.

(h) $x$tan (180° +A) cot (90° +A) = tan (180° - A). tan(360° - A) + cosec (90° – A). cosec(90° + A)

(i) $x$tan (90° - A) cos (90° +A) . sin (180° - A). cot (90° - A) = cosec (270° – A)

(j) tan(90° + A) cot (180° - A) + sec (90° + A). cosec A = $x$cot A tan (90° + A)

5.6 मिश्रित कोणको त्रिकोणमितीय अनुपात (Trigonometric Ratios of Compound Angles)

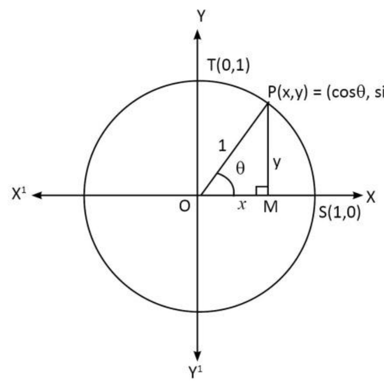
तलका प्रश्नहरूका बारेमा समूहमा छलफल गर्नुहोस् :

(a) दुई कोणहरू A र B का मिश्रित कोणहरू के के हुन सक्छन् ?

(b) एकाइ वृत्त भनेको के हो ?

(c) एकाइ वृत्तमा पर्ने कुनै बिन्दुको निर्देशाङ्क त्रिकोणमितीय अनुपातमा कसरी लेख्न सकिन्छ ?

दुई कोणहरू A र B को योग (A + B) र फरक (A -B) लाई A र B का मिश्रित कोणहरू भनिन्छ ।



उद्गम बिन्दुमा केन्द्र भएको र अर्धव्यास एक एकाइ लिएर बनाइएको वृत्त एकाइ वृत्त हो ।

माथिको चित्रमा केन्द्र O र अर्धव्यास OP= 1 एकाइ भएको एकाइ वृत्तमा पर्ने बिन्दु P(x,y) बाट PM⊥OX खिचौं । OP ले OX सँग बनाएको कोण ∠POX = θ मानौं ।

यहाँ, समकोणी त्रिभुज ΔOMP मा,

$\sin\theta = \frac{p}{h}$

अथवा, $\sin\theta = \frac{PM}{OP}$ अथवा, $\sin\theta = \frac{y}{1}$ अथवा, $y = \sin\theta$

त्यस्तै, $\cos\theta = \frac{b}{h}$

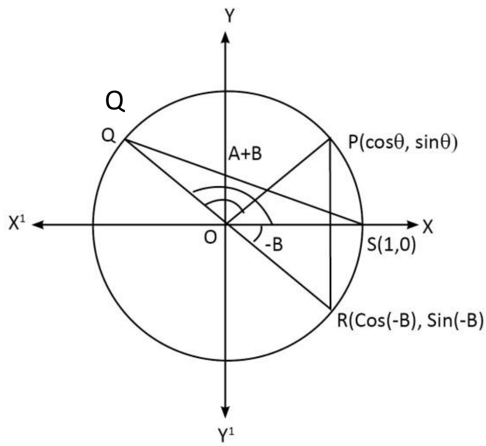
अथवा, $\cos\theta = \frac{OM}{OP}$

अथवा, $\cos\theta = \frac{x}{1}$

अथवा, $x = \cos\theta$

एकाइ वृत्तमा पर्ने कुनै बिन्दु P छ र OP ले OX सँग θ कोण बाउँछ भने, P को निर्देशाङ्क $P(x,y) = (\cos\theta, \sin\theta)$ हुन्छ ।

(क) मिश्रित कोण (A + B) र (A - B) त्रिकोणमितीय अनुपात (Trigonometric ratios of compound angles (A + B) and (A-B)}



माथिको चित्रमा केन्द्र O बाट एकाइ वृत्त खिचिएको छ । $\angle$POS= A र $\angle$POQ =$\angle$B मानौं । तब, $\angle$QOS = A +B हुन्छ । जहाँ बिन्दु S(1,0), X- अक्षमा पर्दछ । $\angle$SOR = -$\angle$B बनाऔं । तब $\angle$PQR को मान A - B हुन्छ ।

चित्रमा बिन्दुहरू P,Q, R र S का निर्देशाङ्कहरू निम्नअनुसार लेख्न सकिन्छ :

P(cosA, sinA)

Q (cos(A +B), sin(A +B))

R (cos(-B), sin(-B)) र S(1,0))

अब दुरी सूत्रबाट,

$SQ^2 = \{(\cos(A+B)-1\}^2 + \{\sin(A+B)-0\}^2$

$= \cos^2(A+B) – 2\cos(A+B).\ 1 + 1^2 + \sin^2(A+B)$

$= 1 + 1 – 2\cos(A + B)$

$= 2 – 2\cos(A + B)$

$= 2\{1-\cos(A + B)\}$

त्यस्तै,

$PR^2 = [(\cos A – \cos(-B))^2 + (\sin A – \sin(-B))^2]$

$= (\cos A - \cos B)^2 + (\sin A + \sin B)^2$

$= \cos^2A – 2\cos A\cos B + \cos^2B + \sin^2A + 2\sin A\sin B + \sin^2B$

$= \cos^2A + \sin^2A + \cos^2B + \sin^2B -2[\cos A\cos B – \sin A\sin B]$

$= 1 + 1 -2[\cos A\cos B – \sin A\sin B]$

$= 2 - 2[\cos A \cos B - \sin A \sin B]$

$= 2[1 - (\cos A \cos B - \sin A \sin B)]$

तर $SQ^2 = PR^2$ [बराबर केन्द्रीय कोणले बनाएका जीवाहरूको वर्ग भएकाले]

अथवा, $2\{1 - \cos(A + B)\} = 2[1 - (\cos A \cos B - \sin A \sin B)$

अथवा, $\cos(A + B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$

र $\cos(A - B) = \cos\{A + (-B)\}$

$= \cos A.\cos(-B) - \sin A.\sin(-B)$

$= \text{Cos}A.\text{Cos}B + \text{Sin}A.\text{Sin}B$

अब, $\sin(A + B) = \cos[90° - (A + B)]$

$= \cos[(90° - A) - B]$

$= \cos(90° - A).\cos B + \sin(90° - A).\sin B$

$= \sin A \cos B + \cos A \sin B$

$\therefore \sin(A + B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$

र $\sin(A - B) = \sin\{A + (-B)\}$

$= \sin A \cos(-B) + \cos A.\sin(-B)$

$= \sin A \cos B - \cos A \sin B$

त्यस्तै, $\tan(A + B) = \dfrac{\sin(A+B)}{\cos(A+B)}$

$= \dfrac{\sin A \cos B + \cos A \sin B}{\cos A\ \text{Cos}B - \sin A \sin B}$

$= \dfrac{\frac{\sin A \cos B - \cos A \sin B}{\cos A\ \text{Cos}B}}{\frac{\cos A \cos B - \sin A \sin B}{\cos A\ \text{Cos}B}}$

$= \dfrac{\frac{\sin A \cos B}{\cos A \cos B} - \frac{\cos A \sin B}{\cos A \cos B}}{\frac{\cos A \cos B}{\cos A \cos B} - \frac{\sin A \sin B}{\cos A \cos B}} = \dfrac{\frac{\sin A}{\cos A} - \frac{\sin B}{\cos B}}{1 - \frac{\sin A}{\cos B}\frac{\sin B}{\cos B}}$

$\therefore \tan(A + B) = \dfrac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$

त्यस्तै, $\tan(A - B) = \dfrac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A \tan B}$

यसैगरी, $\cot(A + B) = \dfrac{\cot A.\cot B - 1}{\cot B + \cot A}$

र $\cot(A - B) = \dfrac{\cot A \cot B + 1}{\cot B - \cot A}$

उदाहरण 1

मिश्रित कोण प्रयोग गरी sin75° को मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान

यहाँ, 75° = 45° + 30°

अथवा, sin75° = sin(45° + 30°)

अथवा, sin75° = sin45°.cos30° + cos45°.sin30°

$= \frac{1}{\sqrt{2}}.\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}.\frac{1}{2}$

$= \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$

$\therefore$ sin75° $= \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$

उदाहरण 2

यदि sin A $= {}^3/_5$ र cosB $= \frac{5}{13}$ भए cos(A +B) को मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान

यहाँ, sinA $= {}^3/_5$

$\therefore$ cosA $= \sqrt{1 - sin^2 A}$

$= \sqrt{1 - ({}^3/_5)^2} \quad = \sqrt{1 - {}^9/_{25}} \quad = \sqrt{\frac{16}{25}} \quad = \frac{4}{5}$

र cosB$= \frac{5}{13}$

$\therefore$ sinB $= \sqrt{1 - cos^2 B}$

$= \sqrt{1 - \left(\frac{5}{13}\right)^2} \quad = \sqrt{1 - \left(\frac{5}{13}\right)^2} \quad = \sqrt{1 - \frac{25}{169}} \quad = \frac{12}{13}$

अब, cos(A + B) = cosA cosB – sinA sinB

$= \frac{4}{5}.\frac{5}{13} - \frac{3}{5}.\frac{12}{13}$

$= \frac{20-36}{65} \quad = \frac{-16}{65}$

उदाहरण 3

यदि $\tan\alpha = \frac{5}{6}$ र $\tan\beta = \frac{1}{11}$ भए $\alpha + \beta = \frac{\pi^c}{4}$ हुन्छ भनी प्रमाणित गर्नुहोस् ।

समाधान

यहाँ, $\tan\alpha = \frac{5}{6}$

$\tan\beta = \frac{1}{11}$

अब, $\tan(\alpha + \beta) = \frac{tan\alpha + tan\beta}{1 - tan\alpha . tan\beta}$

अथवा, $\tan(\alpha + \beta) = \frac{\frac{5}{6} + \frac{1}{11}}{1 - \frac{5}{6} \times \frac{1}{11}} = \frac{\frac{55+6}{66}}{\frac{66-5}{66}} = \frac{61}{61}$

$\therefore \tan(\alpha + \beta) = 1$

अथवा, $\tan(\alpha + \beta) = \tan\frac{\pi^c}{4}$

$\therefore \alpha + \beta = \frac{\pi^c}{4}$ प्रमाणित भयो ।

उदाहरण 4

प्रमाणित गर्नुहोस् : $\frac{\sin(A-B)}{sinAsinB} = cotB - cotA$

समाधान

यहाँ, L.H.S $= \frac{\sin(A-B)}{sinAsinB}$

$= \frac{\sin AcosB - cosAsinB}{sinAsinB}$

$= \frac{\sin AcosB}{sinAsinB} - \frac{\cos AsinB}{sinAsinB}$

$= \cot B - \cot A$

= R.H.S प्रमाणित भयो ।

उदाहरण 5

प्रमाणित गर्नुहोस् : $\frac{\cos 13° + \sin 13°}{\cos 13° - \sin 13°} = \tan 58°$

समाधान

यहाँ, RHS $= \tan 58°$

$= \frac{sin 58°}{cos 58°}$

$= \frac{\sin(45° + 13°)}{\cos(45° + 13°)}$

$= \frac{sin45°.cos13°+cos45°.sin13°}{cos45°.cos13°-sin45°.sin13°}$

$= \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}cos13°+\frac{1}{\sqrt{2}}sin13°}{\frac{1}{\sqrt{2}}\ cos13°-\frac{1}{\sqrt{2}}sin13°}$

$= \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}(cos13°+sin13°)}{\frac{1}{\sqrt{2}}(cos13°-sin13°)}$

$= \frac{cos13°+sin13°}{cos13°-sin13°}$

= L.H.S प्रमाणित भयो ।

उदाहरण 6

प्रमाणित गर्नुहोस् : tan20° + tan72° + tan 88° = tan 20° tan72° tan88°

समाधान

यहाँ, 20° + 72° = 92°

अथवा, tan(20° + 72°) = tan 92°

अथवा, $\frac{\tan 20°+tan72°}{1-\tan 20°tan72°} = \tan(180° - 88°)$

अथवा $\frac{\tan 20°+tan72°}{1-\tan 20°tan72°} = -\tan 88°$

अथवा, $\tan 20° + tan72° = -\tan 88° (1 - \tan20°. \tan72°)$

अथवा, $\tan 20° + tan72° + \tan 88° = tan20° \tan 72° tan88°$

प्रमाणित भयो ।

अभ्यास 5.6

1. मिश्रित कोण प्रयोग गरी मान निकाल्नुहोस् :

   (a) cos15° (b) sin15° (c) tan15° (d) cos75° (e) tan75°

   (f) sin105° (g) cos105° (h) tan105°

2. प्रमाणित गर्नुहोस् :

   (a) cos15° – sin15° = $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (b) cos105° + cos15° = $\frac{1}{\sqrt{2}}$

   (c) sin105° + cos105° = $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (d) sin75° – sin15° = $\frac{1}{\sqrt{2}}$

   (e) tan15° + cot15° = 4

3. यदि $\cos A = \frac{4}{5}$ र $\sin B = \frac{12}{13}$ भए तलका त्रिकोणमितीय अनुपातहरूको मान पत्ता लगाउनुहोस् :

(a) $\sin(A + B)$ (b) $\cos(A + B)$ (c) $\tan(A+B)$ (d) $\sin(A - B)$

(e) $\cos(A - B)$ (f) $\tan(A - B)$

4. प्रमाणित गर्नुहोस् :

(a) $\cot(A + B) = \frac{\cot B \cot A - 1}{\cot B + \cot A}$

(b) $\cot(A - B) = \frac{\cot B \cot A + 1}{\cot B - \cot A}$

(c) $\cos(A + B)\cos(A - B) = \cos^2 A - \sin^2 B = \cos^2 B - \sin^2 A$

(d) $\sin(A + B)\sin(A - B) = \cos^2 B - \cos^2 A = \sin^2 A - \sin^2 B$

(e) $\sin(x+y) + \sin(x - y) = 2\sin x \cos y$

(f) $\sin(x + y) - \sin(x - y) = 2\cos x \sin y$

(g) $\cos(x + y) - \cos(x - y) = -2\sin x \sin y$

(h) $\cos(x + y) + \cos(x - y) = 2\cos x \cos y$

(i) $\frac{\sin(A+B)}{\cos A \cos B} = \tan B + \tan A$

(j) $\tan\alpha = \frac{\tan 3\alpha - \tan 2\alpha}{1 + \tan 3\alpha . \tan 2\alpha}$

5. तलका प्रत्येक अवस्थामा $A + B = \frac{\pi}{4}$ हुन्छ भनी प्रमाणित गर्नुहोस् :

(a) $\tan A = \frac{2}{3}$ र $\tan B = \frac{1}{5}$ (b) $\tan A = \frac{1}{2}$ र $\tan B = \frac{1}{3}$

(c) $\tan A = \frac{4}{5}$ र $\tan B = \frac{1}{9}$ (d) $\tan A = \frac{m}{m+1}$ र $\tan B = \frac{1}{2m+1}$

(e) $\cot A = \frac{11}{10}$ र $\cot B = 21$ (f) $\cot A = \frac{P+1}{P}$ र $\cot B = 2p + 1$

(g) $\cos A = \frac{4}{5}$ र $\cos B = \frac{7}{5\sqrt{2}}$ (h) $\cos A = \frac{2}{\sqrt{5}}$ र $\cos B = \frac{3}{\sqrt{10}}$

(i) $\sin A = \frac{1}{\sqrt{10}}$ र $\sin B = \frac{1}{\sqrt{5}}$ (j) $\cos A = \frac{2}{\sqrt{5}}$ र $\cos B = \frac{3}{\sqrt{10}}$

6. प्रमाणित गर्नुहोस् :

(a) $\tan 56° - \tan 11° = 1 + \tan 56° \tan 11°$

(b) $\tan 30° + \tan 15° = 1 - \tan 30° \tan 15°$

(c) $\tan 20° + \tan 25° + \tan 20° \tan 25° = 1$

(d) $\tan 7A - \tan 4A - \tan 3A = \tan 7A \tan 4A . \tan 3A$

(e) $\tan 44° + \tan 56° + \tan 80° = \tan 80° \tan 56° \tan 44°$

7. प्रमाणित गर्नुहोस् :

(a) $\cos 18° - \sin 18° = \sqrt{2} \sin 27°$

(b) $\sin 65° + \cos 65° = \sqrt{2} \cos 20°$

(c) $\frac{\cos 10° - \sin 10°}{\cos 10° + \sin 10°} = \tan 35°$

(d) $\frac{\cos 17° + \sin 17°}{\cos 17° - \sin 17°} = \tan 62°$

(e) $\frac{\cos 35° + \sin 35°}{\cos 35° - \sin 35°} = \tan 10°$

8. यदि $A + B = \frac{\pi}{4}$ भए प्रमाणित गर्नुहोस् :

(a) $1 - \tan B \tan B = \tan A + \tan B$

(b) $(1 + \tan A)(1 + \tan B) = 2$

(c) $(\cot A - 1)(\cot B - 1) = 2$

9. प्रमाणित गर्नुहोस् :

(a) $\sin(A + B + C) = \cos A \cos B \cos C\,[\tan A + \tan B + \tan C - \tan A \tan B \tan C]$

(b) $\cos(A + B + C) = \cos A \cos B \cos C\,[1 - \tan B . \tan C - \tan A \tan B]$

(c) $\tan(A + B + C) = \frac{\tan A + \tan B + \tan C - \tan A . \tan B . \tan C}{1 - \tan B \tan C - \tan C . \tan A - \tan A \tan B}$

एकाइ 6

भेक्टर (Vector)

6.0 पुनरावलोकन (Review)

तलका प्रश्नहरू समूहमा छलफल गर्नुहोस् :

(a) तपाइँको उचाइ कति छ ?

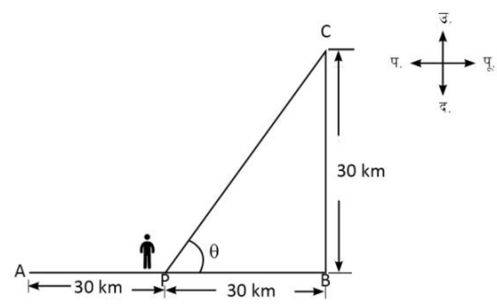
(b) तपाइँले शिक्षकलाई आफ्नो घर विद्यालयबाट 1 km टाढा छ भन्नुभयो भने शिक्षकले तपाइँको घरको पूरा स्थिति थाहा पाउनु होला ? पूरा स्थिति थाहा पाउन दुरी (1km) बाहेक अरू के जानकारी आवश्यक पर्ला ?

(c) सँगैको चित्रमा एउटा मान्छे स्थान P बाट प्रतिघण्टा 15km का दरले दौडदा 2 घण्टामा

(i) कति टाढा पुग्ला ?

(ii) कुन स्थानमा पुग्ला ?

(d) उक्त मान्छे स्थान P बाट रेखा PB सँग कति डिग्री कोण बनाएर सिधा रेखामा हिड्दा स्थान C मा पुग्ला ?



चित्र न. 6.1

6.1 भेक्टरको परिचय (Introduction to vector)

तौल, बल, दुरी, ज्ञान, घनत्व, क्षेत्रफल, भावना मध्ये कुन कुन कुरा नाप्न सकिएला ? नाप्न मिल्ने राशि नै भौतिक राशि (Physical quantity) हुन् । यी दुई प्रकारका छन् ।

(i) स्केलर (scalar) र (ii) भेक्टर (Vector)

(i) स्केलर (scalar)

सामान्यतया पानी कति तापक्रम पुगेपछि उम्लन्छ ? छलफल गर्नुहोस् । पानी 100 °C तापक्रम पुगेपछि उम्लन्छ । यसोभन्दा मान अर्थात सङ्ख्या (100) र एकाइ (°C) ले तापक्रमलाई पूर्ण रूपमा वर्णन गर्न सकिन्छ । त्यस्तै माथि प्रश्न (a) को उत्तर दिँदा तपाइँले आफ्नो उचाइ 5.5 फिट छ भन्नुभयो भने उचाइ पूर्ण रूपमा वर्णन हुन्छ । यस्ता मान हुने भौतिक राशि नै स्केलर हुन् । दुरी (distance), वेग (speed), समय (time) आदि स्केलर हुन् ।

"जुन भौतिक राशिलाई त्यसको मान (सङ्ख्या र एकाइ) (magnitude) ले मात्र पूर्ण रूपमा वर्णन गर्न सकिन्छ, त्यसलाई स्केलर भनिन्छ ।"

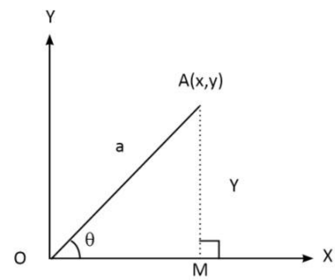
(ii) भेक्टर (Vector)

माथिको प्रश्न (c) माथि छलफल गर्दा 15km लाई 2 ले गुणन गरेर मान्छे 2 घण्टामा 30km टाढा पुग्ला भन्न त सकिएला तर ऊ कुन दिशा (स्थान) मा पुग्ला भन्ने थाहा पाउन सकिएला, छलफल गर्नुहोस् । यहाँ, हामीलाई ऊ कुन दिशामा दौडिरहेको छ भन्ने थाहा नहुँदासम्म कहाँ पुग्ला भन्न सकिँदैन । ऊ पूर्व दौडेको छ भने 30km पार गरेर स्थान B मा पुग्ला वा पश्चिम दौडेको छ भने स्थान A मा पुग्ला । त्यसैले, यहाँ मान्छेको विस्थापन (displacement) थाहा पाउन दिशा अनिवार्य थाहा हुनुपर्छ । यस्ता दिशामा भर पर्ने भौतिक राशि नै भेक्टर हुन् ।

"जुन भौतिक राशिलाई पूर्ण रूपमा वर्णन गर्न त्यसको मान सँगसँगै दिशा पनि चाहिन्छ, त्यसलाई भेक्टर राशि भनिन्छ", जस्तै : गति, प्रवेग यसका उदाहरण हुन् ।

(क) भेक्टर जनाउने तरिका

सँगैको चित्र 6.2 मा कुनै बिन्दु O(0,0) बाट A(x, y) मा विस्थापन भयो भने उक्त विस्थापनलाई निर्देशित रेखाखण्ड (directed line segment) $\overrightarrow{OA}$ ले जनाइन्छ । यहाँ O सुरुको बिन्दु (initial point) हो भने A विस्थापन भएपछिको बिन्दु (terminal point) हो । त्यसैले $\overrightarrow{OA}$ भेक्टर हो । $\overrightarrow{OA}$ ले O बाट A मा भएको विस्थापनलाई जनाउँछ भने $\overrightarrow{AO}$ ले A बाट O मा भएको विस्थापनलाई जनाउँछ । त्यसैले $\overrightarrow{OA}$ र $\overrightarrow{AO}$ फरक भेक्टर हुन् ।



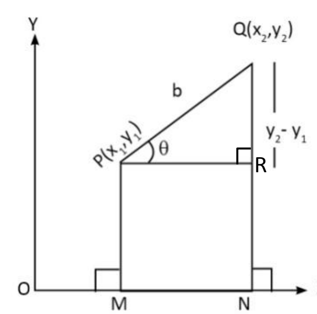
चित्र 6.2

सामान्यतया, भेक्टरलाई गाढा अङ्ग्रेजी अक्षर (boldface letter) ले जनाउने चलन भए पनि लेखाइमा अङ्ग्रेजी अक्षरको माथि तिर arrow प्रयोग गरेर जनाइन्छ । माथिको चित्र 6.1 मा $\overrightarrow{OA}$ लाई **a** वा $\vec{a}$ ले जनाउन सकिन्छ ।

$\overrightarrow{OA}$ लाई भेक्टर a भनेर पढिन्छ । चित्र 6.1 मा $\overrightarrow{OA}$ को पङ्क्ति विस्थापन x र लहर विस्थापन y हुन्, त्यसैले निर्देशाङ्कमा $\overrightarrow{OA}$, $\left(\underset{a}{\rightarrow}\right)$ लाई पङ्क्तिमा (x, y) र लहरमा $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ लेखिन्छ । यहाँ, x लाई x – खण्ड (x - component) र y लाई y खण्ड (y - component) भनिन्छ ।

चित्र 6.3 मा बिन्दुहरू $P(x_1,y_1)$ र $Q(x_2\ y_2)$ जोडेर भेक्टर $\overrightarrow{PQ}$ बनेको छ । बिन्दुहरू P र Q बाट क्रमशः PM र BN x – अक्ष (x -axis) मा लम्ब (perpendicular) र बिन्दु P बाट PR⊥QN खिच्दा, $PR = MN = x_2 - x_1$ र $QR = y_2 - y_1$ हुन्छ ।

यहाँ $\overrightarrow{PQ}$ ($\vec{b}$) को पङ्क्ति विस्थापन PR हो भने लहर विस्थापन QR हो । त्यसैले निर्देशाङ्कमा $\overrightarrow{PQ}$ लाई पङ्क्तिमा (x_2 - x_1, $y_2 - y_1$) र लहरमा $\begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{pmatrix}$

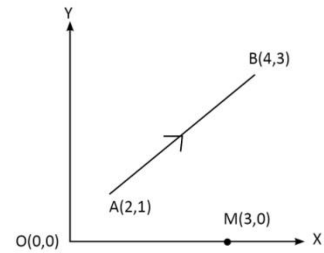


चित्र न. 6.3

यहाँ $\overrightarrow{PQ}$ को x – खण्ड $x_2 - x_1$ र y - खण्ड $y_2 - y_1$ हुन् ।

(ख) भेक्टरको परिमाण **(Magnitude of a vector)**

चित्र 6.4 मा OM र AB को लम्बाइ कति होला ? त्यस्तै चित्र 6.2 मा OA को र चित्र 6.3 मा PQ को लम्बाइ कसरी निकाल्न सकिएला ?



चित्र 6.4

कुनै दुई बिन्दुहरू बिचको दुरीको सूत्र प्रयोग गरेर माथि उल्लेख गरिएका रेखाखण्डहरूको लम्बाइ निकाल्न सकिन्छ । कुनै भेक्टर जनाउने निर्देशित रेखाखण्डको लम्बाइलाई नै उक्त भेक्टरको परिमाण भनिन्छ । चित्र 6.2 मा OA को लम्बाइ $\sqrt{x^2+y^2}$ भएकाले $\underset{\text{OA (a)}}{\longrightarrow\longrightarrow}$ को परिमाण $\sqrt{x^2+y^2}$ एकाइ हुन्छ । यसलाई |OA| ले जनाउने चलन छ । [$(\overrightarrow{|a|})$ लाई a को निरपेक्ष मान (modulus a) भनेर पढिन्छ ।]

त्यस्तै, चित्र 6.3 मा $\overrightarrow{|\mathrm{PQ}|} = \overrightarrow{|\mathrm{b}|} = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$ एकाइ

समग्रमा, भेक्टरको परिमाण =$\sqrt{(x\text{ - खण्ड})^2 + (y\text{ - खण्ड})^2}$ एकाइ

जस्तैः यदि $\vec{a} = (3,4)$ भए $\overrightarrow{|a|} = \sqrt{3^2+4^2} = 5$ एकाइ

लम्बाइ धनात्मक चिह्नमा मात्र व्यक्त गरिने हुनाले भेक्टरको परिमाण पनि धनात्मक हुन्छ ।

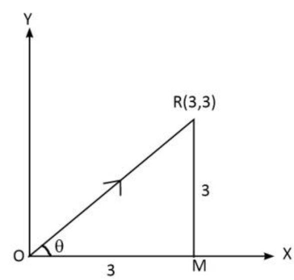
(ग) भेक्टरको दिशा **(Direction of a vector)**

चित्र 6.5 मा रेखाखण्ड OR ले धनात्मक x – अक्ष (positive x-axis) सँग कति डिग्री कोण बनाउँला ?

यदि उक्त कोण θ भए,

$\tan\theta = \frac{\mathrm{RM}}{\mathrm{OM}} = \frac{3}{3} = 1$

$\therefore \theta = 45°$



चित्र 6.5

यहाँ, $\overrightarrow{OR}$ ले धनात्मक x -अक्षसँग 45° कोण बनाएको छ । यही कोण (45°) लाई $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ को दिशा भनिन्छ । चित्र 6.2 मा $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ ले धनात्मक x - अक्षसँग बनाएको कोण ∠AOM =θ हो । त्यहाँ, OM = x र AM = y भएकाले

$\tan\theta = \frac{\mathrm{AM}}{\mathrm{OM}} = \frac{\mathrm{y}}{\mathrm{x}}$

त्यसैले, $\overrightarrow{OA}$ को दिशा $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$ हुन्छ ।

त्यसैगरी, चित्र 6.3 मा $\tan\theta = \frac{QR}{PR} = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$

त्यसैले, $\overrightarrow{PQ}$ को दिशा $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\right)$ हुन्छ ।

समग्रमा, भेक्टरको दिशा: $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{y-\text{खण्ड}}{x-\text{खण्ड}}\right)$

जस्तै, $\vec{a} = (3, 2)$ को दिशा $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{2}{3}\right) = 33.69°$

(ङ) भेक्टरका खण्ड र दिशाको सम्बन्ध

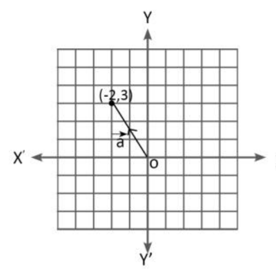
X – खण्ड	Y – खण्ड	दिशा (कोण - θ)
धनात्मक (+ve)	शून्य (0)	θ= 0°
ऋणात्मक (-ve)	0	θ= 180°
0	धनात्मक	θ = 90°
0	ऋणात्मक	θ = 270°
धनात्मक	धनात्मक	0° < θ < 90°
ऋणात्मक	धनात्मक	90°<θ<180°
ऋणात्मक	ऋणात्मक	180°<θ< 270°
धनात्मक	ऋणात्मक	270°<θ< 360°

उदाहरण 1

(a) $\vec{a} = (-2, 3)$ लाई तीर चित्र (arrow diagram) मा देखाउनुहोस् ।

समाधान

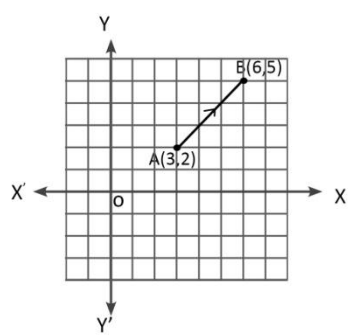
$\vec{a} = (-2, 3)$ लाई तीर चित्रमा देखाउँदा,



(b) यदि $\overrightarrow{AB}$ ले बिन्दु A(3, 2) लाई B(6,5) मा विस्थापन गर्छ भने $\overrightarrow{AB}$ जनाउने चित्र खिच्नुहोस् र $\overrightarrow{AB}$ लाई लहर भेक्टरमा व्यक्त गर्नुहोस् ।

समाधान

यहाँ, $\overrightarrow{AB}$ लाई सँगैको तीर चित्रमा देखाउँदा



फेरि,

A(3, 2) = (x_1, y_1)

B(6,5) = (x_2, y_2)

AB को x – खण्ड = $x_2 - x_1$ = 6 -3 =3

$\overrightarrow{AB}$ को y खण्ड = $y_2 - y_1$ = 5 – 2 = 3

त्यसैले, $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$

उदाहरण 2

$\overrightarrow{AB} = (-4,3)$ को परिमाण र दिशा पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान

यहाँ, $\vec{a} = (-4,3)$

$\therefore x-$ खण्ड = -4

y – खण्ड = 3

अब, $\underset{a}{\rightarrow}$ को परिमाण $\underset{|a|}{\rightarrow}$ $=\sqrt{(x-\text{खण्ड})^2 + (y-\text{खण्ड})^2}$

$= \sqrt{(-4)^2 + (3)^2}$

= 5 एकाइ

यदि $\vec{a}$ ले धनात्मक $x-$ अक्षसँग बनाएको कोण θ भए $\tan\theta = \frac{y-\text{ खण्ड}}{x-\text{ खण्ड}}$

or, $\tan\theta = \frac{3}{-4}$

यहाँ, x- खण्ड ऋणात्मक (-ve) र y-खण्ड धनात्मक (-ve) भएकाले 90°<θ<180°

$\therefore\theta$ = 180° – 36.87° $\quad [\theta = tan^{-1}\left(\frac{3}{4}\right) = 36.87°]$

= 143.13°

त्यसैले, $\underset{a}{\rightarrow}$ को परिमाण 5 एकाइ र दिशा 143.13° हुन् ।

उदाहरण 3

यदि $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ ले बिन्दु A(5,3) लाई बिन्दु B(8,1) मा विस्थापन गर्छ र $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ ले बिन्दु P(2,0) लाई Q(-1,2) मा विस्थापना गर्छ भने प्रमाणित गर्नुहोस् : $|\overrightarrow{\mathrm{AB}}| = |\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|$

समाधान

यहाँ, $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ का लागि

$A(5,3) = (x_1, y_1)$

$B(8,1) = (x_2, y_2)$

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ को परिमाण $|\overrightarrow{\mathrm{AB}}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

$= \sqrt{(8-5)^2 + (1-3)^2}$

$= \sqrt{3^2 + (-2)^2}$

$= \sqrt{13}$ एकाइ

त्यस्तै, $\overrightarrow{PQ}$ का लागि

$P(2,0) = (x_1, y_1)$

$Q(-1,2) = (x_2,y_2)$

$\overrightarrow{PQ}$ को परिमाण $|\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

$= \sqrt{(-1-2)^2 + (2-0)^2}$

$= \sqrt{(-3)^2 + 2^2}$

$= \sqrt{13}$ एकाइ

तसर्थ, $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{PQ}|$ प्रमाणित भयो ।

अभ्यास 6.1

1. भेक्टर र स्केलरको उदाहरणसहित परिभाषा दिनुहोस् ।

2. तलका राशिहरू भेक्टर वा स्केलर के हुन् ? कारणसहित लेख्नुहोस् :

   दुरी (distance), विस्थापन (displacement), बल (force), वेग (speed), गति (velocity), काम (work), घनत्व (density), क्षेत्रफल (Area), आयतन (volume), प्रवेग (acceleration)

3. तलका भेक्टरलाई तीर (arrow) चित्रमा देखाउनुहोस् :

   (a) $\underset{a}{\rightarrow} = (3,2)$ (b) $\underset{b}{\rightarrow} = (-3,4)$

   (c) $\underset{c}{\rightarrow} = (5,-2)$ (d) $\underset{d}{\rightarrow} = (-4,-2)$

4. यदि $\overrightarrow{AB}$ ले बिन्दु A लाई B मा विस्थापन गर्छ भने $\overrightarrow{AB}$ लाई तीर चित्रमा देखाई लहरमा व्यक्त गर्नुहोस् ।

   (a) A(2,5), B(-1,0) (b) A(-6,4), B(0,-1)

5. तलका प्रत्येक भेक्टरको परिमाण र दिशा पत्ता लगाउनुहोस् :

   (a) $\underset{a}{\rightarrow} = (3,3)$ (b) $\underset{b}{\rightarrow} = (-4,3)$ (c) $\underset{c}{\rightarrow} = (-5,5\sqrt{3})$

6. यदि $\overrightarrow{PQ}$ ले P लाई Q मा विस्थापन गर्छ भने $\overrightarrow{PQ}$ लाई लहरमा व्यक्त गर्नुहोस् । साथै $\overrightarrow{PQ}$ को परिमाण र दिशा पत्ता लगाउनुहोस् ।

   (a) P(2,-2), Q(7,-5) (b) P(4, -2), Q (6, 1)

7. A यदि $\overrightarrow{AB}$ ले A लाई B मा र $\overrightarrow{CD}$ ले c लाई D मा विस्थापन गर्छन् भने प्रमाणित गर्नुहोस् ।

$\overrightarrow{|AB|} = \overrightarrow{|CD|}$

(a) A(-5,4), B(0,2), C(1,-1), D (6, -3) (b) A(4, 5), B(7, -3), C(-1,-3), D(2,-11)

8. A(-3,2), B(2, 4), c(x, 3) र D(2, -2) चार बिन्दुहरू हुन् । यदि $\overrightarrow{|AB|} = \overrightarrow{|CD|}$ भए x को मान कति होला ?

9. कक्षामा 3/3 जनाको समूह बनाउनुहोस् । समूहका प्रत्येक सदस्यले आफ्नो घर, समाज र विद्यालयमा हुने गरेका भौतिक राशिको सूची बनाई समूहमा प्रस्तुत गरी सबैको समावेश गरी नयाँ सूची बनाउनुहोस् । अब ती राशिहरू स्केलर वा भेक्टर के हुन् कारणसहित छलफल गरी छुट्टाछुट्टै सूची बनाउनुहोस् ।

6.2 भेक्टरका प्रकार (Types of vector)

(i) लहर भेक्टर (column vector)

चित्र 6.5 मा $\vec{a}$ पत्ता लगाउनुहोस् ।

$\vec{a}$ का x - र y- खण्डहरू कति किसिमले लेख्न सकिएला ? छलफल गर्नुहास् ।

यहाँ $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$ मा $\vec{a}$ का x - र y - खण्डहरू लहरमा लेखिएका छन् । यसरी कुनै भेक्टरका खण्डहरू लहरमा लेखेर सानो कोष्ठले घेरिएका छन् भने त्यसरी जनाएका भेक्टरहरू लहर भेक्टर हुन् ।

जस्तै: $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{pmatrix}, \overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ -7 \end{pmatrix}$

(ii) पङ्ति भेक्टर (row vector)

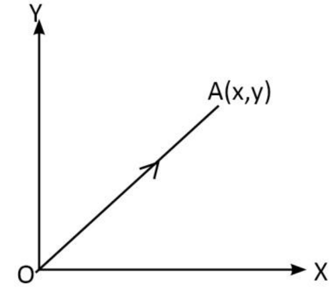
माथिको $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$ लाई अर्को तरिकाले पनि लेख्न सकिएला ?

माथिको $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$ लाई $\vec{a} = (3, 3)$ पनि लेख्ने चलन छ ।

यहाँ x - र y – खण्डहरू पङतिमा लेखेर अल्पविराम (comma) छुट्याएर सानो कोष्ठले घेरिएका छन् । यसरी जनाइएका भेक्टरलाई पङ्ति भेक्टर भनिन्छ, जस्तै, $\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_{1,} \quad y_2 - y_1)$, $\vec{b} = (5, -7)$

(iii) स्थिति भेक्टर (Position vector)

चित्र 6.6 मा $\overrightarrow{OA}$ को सुरुको बिन्दु के छ ? के $\overrightarrow{OA}$ ले A को स्थितिलाई जनाउला ? यदि $\overrightarrow{OA}$ ले A को यदि 0(0,0) लाई A(x,y) मा विस्थापन गर्छ भने $\overrightarrow{OA}$ ले A(x,y) को स्थिति (position) जनाउँछ । यहाँ, $\overrightarrow{OA}$ लाई स्थिति भेक्टर भनिन्छ । स्थिति भेक्टरको प्रारम्भिक बिन्दु जहिले पनि उद्गम बिन्दु 0(0,0) हुन्छ ।



चित्र न. 6.6

(iv) **एकाइ भेक्टर (unit vector)**

भेक्टर $\vec{a} = (1,0)$ र $\vec{b} = (0,-1)$ का परिमाण पत्ता लगाउनुहोस् । के तिनीहरूको मान 1 एकाइ छ ? परिमाण 1 एकाइ हुने भेक्टरलाई एकाइ भेक्टर भनिन्छ । कुनै भेक्टर $\vec{a}$ लाई त्यसको परिमाण $\overline{|a|}$ ले भाग गर्दा आउने भेक्टर नै $\vec{a}$ दिशाको एकाइ भेक्टर हो । यसलाई $\hat{a}$ ले जनाउने चलन छ ।

त्यसैले, $\hat{a} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$

जस्तैः $\vec{b} = (3,4)$ भए $\vec{b}$ दिशाको एकाइ भेक्टर

$\hat{b} = \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|} = \frac{(3,4)}{\sqrt{3^2+4^2}} = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$

x - र y – अक्षरसँग समानान्तर हुने एकाइ भेक्टरलाई क्रमशः $\hat{i} = (1,0)$ र $\hat{j} = (0, 1)$ ले जनाइन्छ ।

कुनै भेक्टर $\vec{a} = (x, y)$लाई $\vec{a} = x\hat{i} + y\hat{j}$ लेख्न सकिन्छ ।

xi + yj = x(1,0) + y(0,1) = (x ,0) + (0,y) = (x + 0,0 +y) = (x,y)

(v) **शून्य भेक्टर (Zero or null vector)**

यदि कुनै भेक्टरले A(x,y) लाई A(x,y) मा नै विस्थापन गर्छ भने त्यो भेक्टरको परिमाण कति होला ? छलफल गर्नुहोस् ।

यहाँ उपर्युक्त भेक्टरको परिमाण शून्य (0) हुन्छ । यसरी शुन्य परिमाण हुने भेक्टरलाई शून्य भेक्टर भनिन्छ । $\vec{a} = (0,0)$ शुन्य भेक्टर हो ।

(vi) **ऋणात्मक भेक्टर (Negative vector)**

यदि $\overrightarrow{AB} = (3,2)$ भए $\overrightarrow{BA}$ पनि (3,2) लेख्न मिल्ला ? यहाँ $\overrightarrow{AB}$ ले बिन्दु A लाई B मा विस्थापन गरेको छ भने $\overrightarrow{BA}$ ले बिन्दु B लाई A मा विस्थापन गरेको छ । तिनीहरूलाई जनाउने रेखाखण्डको लम्बाइ (परिमाण) बराबर भए पनि दिशा एकअर्काका विपरीत छन् । यसरी परिमाण बराबर तर दिशा विपरीत हुने भेक्टरलाई ऋणात्मक भेक्टर भनिन्छ । $\overrightarrow{AB}$ र $\overrightarrow{BA}$ एकअर्काका ऋणात्मक भेक्टर हुन् ।

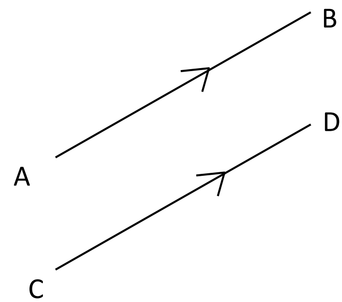
यहाँ $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$ हुन्छ ।

जस्तैः $\vec{a} = (6, 2)$ र $\vec{b} = (-6, -2)$ एकअर्काका ऋणात्मक भेक्टर हुन् ।

(vii) बराबर भेक्टरहरू (Equal vectors)

चित्र 6.7 मा $\overrightarrow{AB}$ र $\overrightarrow{CD}$ का परिमाण र दिशा पत्ता लगाउनुहोस् । के तिनीहरूको परिमाण बराबर छ ? के दिशा पनि समान छ ?

यहाँ $\overrightarrow{AB}$ ले बिन्दु A लाई B मा जति परिमाणमा जुन दिशामा विस्थापन गरेको छ $\overrightarrow{CD}$ ले बिन्दु C लाई D मा त्यति नै परिमाणमा त्यही दिशामा विस्थापन गरेको छ ।

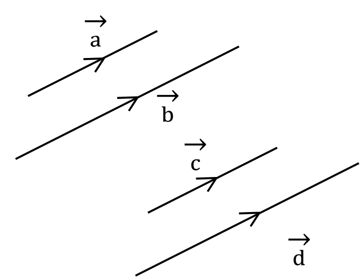


चित्र 6.7

यसरी परिमाण र दिशा दुवै आपसमा बराबर हुने भेक्टरहरूलाई बराबर भेक्टर भनिन्छ । $\vec{a} = (x_1, y_1)$ र $\vec{b} = (x_2, y_2)$ बराबर हुन $x_1 = x_2$ र $y_1 = y_2$ हुनुपर्छ ।

(viii) समान र असमान भेक्टरहरू (Like and unlike vectors)

चित्र 6.8 मा $\vec{a}$ र $\vec{b}$ का परिमाण भिन्न छन् तर तिनीहरूको दिशा समान छ । यसरी परिमाण जतिसुकै भए पनि दिशा समान हुने भेक्टरहरूलाई समान भेक्टर भनिन्छ, जस्तै : $\vec{a} = (3, 2)$ र $\vec{b} = (6, 4)$ समान भेक्टर हुन् । त्यस्तै, $\vec{c}$ र $\vec{d}$ का परिमाण फरक छन् अनि दिशा विपरीत छन् । यसरी परिमाण जतिसुकै भए पनि दिशा विपरीत हुने भेक्टेरहरूलाई असमान भेक्टर भनिन्छ ।



जस्तै : $\vec{c} = (3, 2)$ र $\vec{d} = (-6, -4)$ असमान भेक्टर हुन् ।

चित्र 6.8

समान वा असमान भेक्टहरू समानान्तर (parallel वा collinear) भेक्टर हुन्छन् ।

उदाहरण 1

यदि $\overrightarrow{MN}$ ले बिन्दु M(3, 1) लाई N(5, - 2) मा विस्थापन गर्छ भने $\overrightarrow{MN}$ लाई xi + yj स्वरूपमा व्यक्त गर्नुहोस् र $\overrightarrow{MN}$ दिशाको एकाइ भेक्टर पनि पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान

यहाँ, $M(3,1) = (x_1, y_1)$

$N(5,-2) = (x_2, y_2)$

$\therefore \overrightarrow{MN} = (x_2 - x_2, y_2 - y_1)$

$= (5 - 3, -2 - 1)$

$= (2, -3) = 2i - 3j$

अब, $\overrightarrow{MN}$ को परिमाण $|\overrightarrow{MN}| = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{2^2+(-3)^2} = \sqrt{13}$ एकाइ

पुनः $\overrightarrow{MN}$ दिशाको एकाइ भेक्टर $= \frac{\overrightarrow{MN}}{|\overrightarrow{MN}|} = \frac{(2,-3)}{\sqrt{13}} = \left(\frac{2}{\sqrt{13}}, \frac{-3}{\sqrt{13}}\right)$

उदाहरण 2

यदि $\vec{a} = \left(\frac{3}{5}, y\right)$ एउटा एकाइ भेक्टर भए y को मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान

यहाँ $\vec{a} = \left(\frac{3}{5}, y\right)$ एकाइ भेक्टर भएकाले $|\vec{a}| = 1$

अब, $|\vec{a}| = \sqrt{\left(\frac{3}{5}\right)^2 + y^2}$

or, $1 = \sqrt{\frac{9}{25} + y^2}$

or, $\frac{9}{25} + y^2 = 1$

or, $y^2 = 1 - \frac{9}{25}$

or, $y^2 = \frac{16}{25}$

$\therefore$ y = $\pm\frac{4}{5}$

उदाहरण 3

यदि $\vec{a} = (2,1)$ र $\vec{b} = (6,3)$ भए $\vec{a}$ र $\vec{b}$ समान भेक्टर हुन् भनी प्रमाणित गर्नुहोस् ।

समाधान

यहाँ $\vec{a} = (2,1) = (x, y)$

$\vec{a}$ को दिशा $(\theta) = \tan^{-1}\left({}^{y}/_{x}\right)$

$= \tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$

त्यस्तै, $\vec{b} = (6,3) = (x, y)$

$\vec{b}$ को दिशा (θ) $= \tan -1 \left({}^{y}/_{x}\right)$

$= \tan^{-1}\left(\frac{3}{6}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$

यहाँ $\vec{a}$ र $\vec{b}$ को समान दिशा भएकाले तिनीहरू समान भेक्टर हुन् ।

उदाहरण 4

यदि $\overrightarrow{AB}$ ले A(2, 2) लाई B(5, 6) मा र $\overrightarrow{CD}$ ले C(3, 0) लाई D(6,4) मा विस्थापन गर्छन् भने प्रमाणित गर्नुहोस् $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$

समाधान

यहाँ A(2, 2) = (x_1, y_1)

B(5, 6) = (x_2, y_2)

अब, $\underset{AB}{\rightarrow} = (x_2 - x_1, y_{2-}\, y_1)$

= (5 – 2, 6 -2) = (3, 4)

$\overrightarrow{AB}$ **को परिमाण** $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{5}$ **एकाइ**

$\overrightarrow{AB}$ **को दिशा** (θ) = $\tan^{-1}\left(\frac{4}{3}\right)$

फेरि, C(3,0) = (x_1, y_1)

D(6, 4) = (x_2, y_2)

अब, $\overrightarrow{CD} = (x_2 - x_1, y_{2-}\, y_1)$

= (6 – 3, 4 -0)

= (3,4)

$\overrightarrow{CD}$ **को परिमाण** $|\overrightarrow{CD}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ **एकाइ**

$\overrightarrow{CD}$ **को दिशा** (θ) = $tan^{-1}\left(\frac{4}{3}\right)$

यहाँ, $\overrightarrow{AB}$ **र** $\overrightarrow{CD}$ **का परिमाण बराबर र दिशा समान भएकाले** $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ **हुन्छ ।**

उदाहरण 5

A (1, 3), B(-3,1), C(-1,-1) **र** D(x, y) **चार बिन्दुहरू हुन् । यदि** $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$ **भए** x **र** y **का मान पत्ता लगाउनुहोस् ।**

समाधान

यहाँ, $\underset{BC}{\rightarrow}$ **का लागि**

B(-3, 1) = (x_1, y_1)

C(-1, -1) = (x_2, y_2)

$\therefore \underset{BC}{\rightarrow}$ = ($x_2 - x_1$, y_2 - y)

$= (-1 + 3, -1 -1) = (2, -2)$

त्यस्तै, $\underset{AD}{\rightarrow}$ का लागि

$A(1, 3) = (x_1, y_1)$

$D(x, y) = (x_2, y_2)$

$\therefore \underset{AD}{\rightarrow} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$

$= (x - 1, y - 3)$

अब, प्रश्नअनुसार, $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$

Or, $(2, -2) = (x - 1, y - 3)$

X –खण्ड र y- खण्ड बराबर गर्दा,

$2 = x - 1$ र $-2 = y - 3$

अथवा, $x = 2 + 1$ अथवा, $y = -2 + 3$

$\therefore x = 3$ $\therefore y = 1$

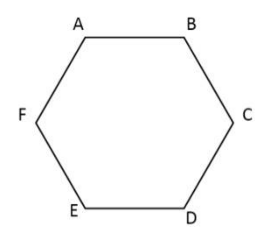
तसर्थ, x को मान 3 र y को मान 1 हुन्छ ।

अभ्यास 6.2

1. परिभाषा दिनुहोस् :

   (a) एकाइ भेक्टर (b) स्थिति भेक्टर (c) समान भेक्टर

2. सँगै दिइएको नियमित षट्भुज (Regular hexagon) ABCDEF मा बराबर, समान, असमान र ऋणात्मक भेक्टरहरू पहिचान गर्नुहोस् ।



3. तल दिइएका भेक्टरहरूको दिशामा एकाइ भेक्टर पत्ता लगाउनुहोस् :

   (a) $\vec{a} = (-3,4)$ (b) $\vec{b} = (2, -5)$

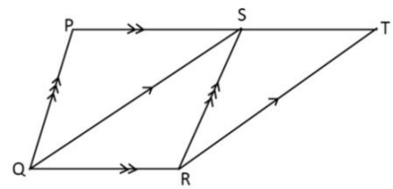
4. यदि $\overrightarrow{AB}$ ले बिन्दु A लाई B मा विस्थापन गर्छ भने $\overrightarrow{AB}$ लाई xi + yj स्वरूपमा व्यक्त गर्नुहोस् र $\overrightarrow{AB}$ दिशाको एकाइ भेक्टर पनि पत्ता लगाउनुहोस् ।

(a) A(5.6), B(-2, 0) (b) A(-2, 1), B(-1, -2)

5. (a) यदि (x, 1) एकाइ भेक्टर भए x को मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

   (b) यदि$\left(\frac{-3}{\sqrt{13}}, \frac{y}{\sqrt{13}}\right)$ एकाइ भेक्टर भए y को मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

6.	सँगैको चित्रमा PT ∥ QR, QS ∥ RT र PQ ∥ SR छन् भने तलका प्रश्नको समाधान निकाल्नुहोस् :



(a)	$\overrightarrow{PQ}$ सँग बराबर हुने भेक्टर कुन हो ?

(b)	$\overrightarrow{QS}$ सँग बराबर हुने भेक्टर कुन हो ?

(c)	$\overrightarrow{QR}$ सँग बराबर हुने दुई ओटा भेक्टर कुन कुन हुन् ?

(d)	$\overrightarrow{ST}$ सँग बराबर हुने ऋणात्मक भेक्टर कुन कुन हुन् ?

(e)	$\overrightarrow{RS}$ को ऋणात्मक भेक्टर कुन हो ?

(f)	$\overrightarrow{TR}$ को ऋणात्मक भेक्टर कुन हो ?

7.	तल दिइएका जोडी भेक्टरहरू समान वा असमान के छन् ? पत्ता लगाउनुहोस् :

(a)	$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ र $\vec{b} = \begin{pmatrix} -6 \\ -15 \end{pmatrix}$	(b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \end{pmatrix}$र $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

8.	(a)	यदि $\overrightarrow{AB}$ ले A(2, -1) लाई B(3, 3) मा र $\overrightarrow{CD}$ ले C(-2-6) लाई D(-1, -2) मा विस्थापन गर्छन् भने प्रमाणित गर्नुहोस् $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ ।

(b)	यदि $\overrightarrow{PQ}$ ले P(2,-3) लाई Q(4,-2) मा र $\overrightarrow{RS}$ ले R(1,-4) लाई S(-1, -5) मा विस्थापन गर्छन् भने प्रमाणित गर्नुहोस् $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{RS}$ ।

9.	(a)	मानौँ A(0,-3), B(2,5), C(-2, -3) कुनै तिन बिन्दुहरू हुन् । यदि $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ भए D को निर्देशाङ्क पत्ता लगाउनुहोस् ।

(b)	मानौँ A(-1,y), B(0,4), C (-1, 3) र D(x, 6) कुनै चार बिन्दुहरू हुन् । यदि $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ भए x र y को मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

10.	तपाईंले दैनिक जीवनमा हालसम्म भेक्टरको प्रयोग कहाँ कहाँ पाउनु भएको छ ? खोजी गरी प्रतिवेदन तयार पारी कक्षामा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

6.3 भेक्टरका क्रियाहरू (Operations of vectors)

(क) भेक्टरलाई स्केलरले गुणन (Multiplication of a vector by scalar)

भेक्टर $\vec{a} = (3,2)$ र $\vec{b} = (6,4)$ को मान र दिशा पत्ता लगाउनुहोस् । तिनीहरूबिच के समानता छ ? समूहमा छलफल गर्नुहोस् । यहाँ $|\vec{a}|$ लाई 2 ले गुणन गर्दा $|\vec{b}|$ हुन्छ अनि $\vec{a}$ र $\vec{b}$ का दिशा समान छन् ।

त्यसैले, $\vec{b} = (6,4)$

$= 2(3, 2)$

$= 2\vec{a}$

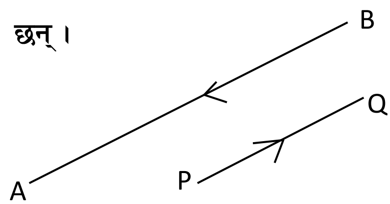
यहाँ $\vec{a}$ लाई 2 (स्केलर सङ्ख्या) ले गुणन गर्दा $\vec{b}$ बन्छ ।

यदि $\vec{a} = (x, y)$ एउटा भेक्टर र K कुनै स्केलर छ भने $\vec{a}$ लाई K ले गुणन गर्दा $\overrightarrow{ka} = k(x, y) = (kx, ky)$ हुन्छ । यहाँ $\overrightarrow{ka}$ को परिमाण $\vec{a}$ को k गुणा हुन्छ । k धनात्मक (+ve) हुँदा $\vec{a}$ र $\overrightarrow{ka}$ को दिशा समान हुन्छ भने K ऋणात्मक (-ve) हुँदा $\vec{a}$ र $\overrightarrow{ka}$ का दिशा विपरीत हुन्छ । K धनात्मक वा ऋणात्मक जे हुँदा पनि $\vec{a}$ र $\overrightarrow{ka}$ एक आपसमा समानान्तर हुन्छन् ।

जस्तै: यदि $\overrightarrow{AB} = (-3,2)$ र $\overrightarrow{PQ} = (\frac{3}{2}, -1)$ छन् ।

भने $\overrightarrow{PQ} = \frac{-1}{2}(-3,2) = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

यहाँ $|\overrightarrow{PQ}| = -\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}|$

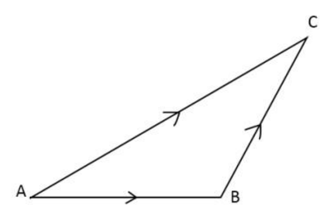


अनि $\overrightarrow{PQ}$ र $\overrightarrow{AB}$ का दिशा एक आपसमा विपरीत छन् । त्यसैले $\overrightarrow{PQ}$ र $\overrightarrow{AB}$ समानान्तर छन् ।

(ख) भेक्टर जोड (Addition of vectors)

भेक्टरको परिमाण मात्र नभई दिशा पनि हुन्छ । के दुई भेक्टरहरू बीज गणितका साधारण नियमका आधारमा जोड्न सकिन्छ ? छलफल गर्नुहोस् ।

के सँगैको चित्र 6.0 मा $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ लेख्न सकिन्छ ? कारण दिनुहोस् ।



यदि $\overrightarrow{AB}$ ले बिन्दु A लाई B मा र $\overrightarrow{BC}$ ले बिन्दु B लाई C मा विस्थापन गर्छन् भने तिनीहरूको समग्र विस्थापन $\overrightarrow{AC}$ (बिन्दु A बाट C सम्मको विस्थापन) ले दिन्छ । अर्थात $\overrightarrow{AB}$ र $\overrightarrow{BC}$ को योगफल $\overrightarrow{AC}$ हुन्छ ।

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

भेक्टर जोडको यो नियमलाई भेक्टर जोडको त्रिभुज नियम (Tringle law of vector addition) भनिन्छ ।

यदि एउटै क्रममा लिएका त्रिभुजका दुई भुजाहरूले परिमाण र दिशा दुवैमा दुइटा भेक्टरहरूलाई जनाउँछ भने ती भेक्टरहरूको योगफल त्यही त्रिभुजको विपरीत क्रममा लिएको तेस्रो भुजाको परिमाण र दिशासँग बराबर हुन्छ ।

चित्र 6.10 मा, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

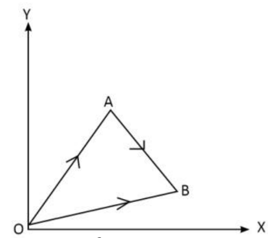
Or, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{-CA}$

Or, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = 0$

यहाँ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}$ र $\overrightarrow{AC}$ सबै एउटै क्रममा छन् ।

त्यस्तै, चित्र 6.11 को ΔAOB मा भेक्टर जोडको त्रिभुजको नियमअनुसार $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB}$

or, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$

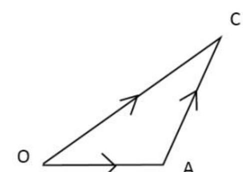


चित्र 6.11

यहाँ $\overrightarrow{OA}$ र $\overrightarrow{OB}$ स्थिति भेक्टरहरू हुन् ।

त्यसैले, $\overrightarrow{AB} = B$ को स्थिति भेक्टर -A को स्थिति भेक्टर $= \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$

चित्र 6.12 को ΔOAC मा भेक्टर जोडको त्रिभुज नियम अनुसार $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC}$

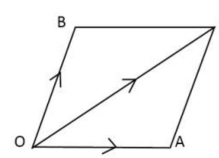


चित्र 6.12

ΔOAC मा OB लाई एउटा भुजा र $\overrightarrow{OC}$ लाई विकर्ण मानेर एउटा समानान्तर चतुर्भुज OACB बनाउँदा, $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OB}$ हुन्छ ।

त्यसैले, $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$

यहाँ $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$ र $\overrightarrow{OC}$ सबैको प्रारम्भिक बिन्दु O हो ।



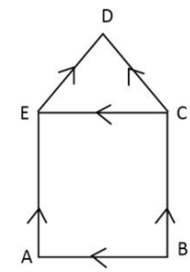
चित्र 6.13

भेक्टर जोडको यो नियमलाई भेक्टर जोडको समानान्तर चतुर्भुज नियम (parallelogram law of vector addition) भनिन्छ ।

यदि एउटै बिन्दुबाट सुरु भएका दुई भेक्टरहरूको परिमाण र दिशालाई एउटा समान्तर चतुर्भुजका दुई आसन्न भुजाहरूले जनाउन मिल्छ भने ती भेक्टरहरूको योगफल त्यही बिन्दुबाट सुरु भएको उक्त चतुर्भुजका विकर्णको परिमाण र दिशासँग बराबर हुन्छ ।

एउटै क्रममा भएका दुई भेक्टरहरूलाई जोड्न त्रिभुज नियम प्रयोग गरिन्छ भने एकै बिन्दुबाट सुरु भएका दुई भेक्टरहरू जोड्न समानान्तर चर्तुभुज नियम प्रयोग गरिन्छ । के दुईभन्दा बढी भेक्टरहरू माथि भनिएका दुई नियमले जोड्न मिल्छ ? छलफल गर्नुहोस् ।

यदि हामीलाई योगफल निकाल्नु परेका चार भेक्टरहरहरू $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c},$ र $\vec{d}$ लाई परिमाण र दिशामा चित्र 6.14 मा देखाइएको पञ्चभुज ABCDE का भुजाहरू AB, BC, CD र DE ले क्रमशः जनाउन मिल्छ भने,



चित्र 6.14

$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE}$

$= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CE}$ [भेक्टर जोडको त्रिभुज नियम]

$= \overrightarrow{AE}$ [भेक्टर जोडको त्रिभुज नियम]

यो भेक्टर जोडको त्रिभुज नियमको विस्तारित रूप हो । यसलाई भेक्टरहरू जोडको बहुभुज नियम (polygon law of vector addition) भनिन्छ । यी नियमअनुसार यदि दुईभन्दा बढी भेक्टरहरूको योगफल निकाल्नु छ भने भेक्टरहरूलाई एकै क्रममा लिएका बहुभुजका भुजामा व्यक्त गरिन्छ र तिनीहरूको योगफल विपरीत क्रममा लिएको अन्तिम भुजाको परिमाण र दिशासँग बराबर हुन्छ ।

(ग) **लहर भेक्टरहरूको जोड**

यदि $\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ र $\overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ छ भने A र B का निर्देशाङ्कहरू क्रमशः (x_1, y_1) र (x_2, y_2) हुन्छन् । OA र OB लाई आसन्न भुजा लिएर समानान्तर चतुर्भज OACB (चित्र 6.15) रचना गरौँ । $AM \perp OX$, $BN \perp OX$, $CP \perp OX$ र $BQ \perp CP$ खिचौँ ।

यहाँ, $\Delta AOM \cong \Delta CBQ$

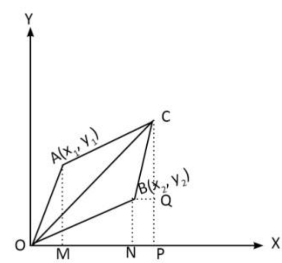
त्यसैले, $OM = BQ = NP = x_1$

$CQ = AM = y_1$

अब, $OP = ON + NP = x_2 + x_1$

$PC = PQ + QC = NB + QC = y_2 + y_1$

$\therefore$ C का निर्देशाङ्कहरू $= (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$



चित्र 6.15

अर्थात $\overrightarrow{OC} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix}$

अब, भेक्टर जोडको समानान्तर चतुर्भुज नियमअनुसार $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC}$

Or, $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix}$

यसरी, लहर भेक्टरहरू जोड्दा भेक्टरहरूको x – खण्डलाई x – खण्डसँग र y– खण्डलाई y-खण्डसँग जोड्नुपर्छ ।

जस्तै, यदि $\vec{a} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$ र $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ भए

$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 + 2 \\ 4 + 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \end{pmatrix}$

(घ) **भेक्टर जोडका गुणहरू**

यदि $\vec{a}, \vec{b}$ र $\vec{c}$ भेक्टरहरू र k कुनै स्केलर भए

(i) $\vec{a}+\vec{b}$ र $\overrightarrow{ka}$ पनि भेक्टर हुन्छन् । (बन्दी गुण) (closure property)

(ii) $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ हुन्छ । (क्रम विनियम गुण) (commutative property)

(iii) $\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}$ हुन्छ । (सङ्घीय गुण) (associative property)

(iv) $\vec{a}+(-\vec{a})=0$ हुन्छ । (विपरीत गुण) (inverse property)

(v) $k(\vec{a}+\vec{b})=k\vec{a}+k\vec{b}$ हुन्छ ।(वितरणको गुण) (distributive property)

(vi) $\vec{a}+0=0+\vec{a}=\vec{a}$ हुन्छ । (एकात्मक गुण) (identity property)

(ङ) **भेक्टरहरूको घटाउ (subtraction of vectors)**

के $\vec{a}-\vec{b}$ लाई $\vec{a}+(-\vec{b})$ लेख्न सकिन्छ ? भेक्टरहरूको जोड र घटाउमा के समानता छ ? छलफल गर्नुहोस् ।

यहाँ, $\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})$

त्यसैले दुई धनात्मक भेक्टरहरू ($\vec{a}$ र $\vec{b}$) को घटाउ भनेकै एक धनात्मक ($\vec{a}$) र अर्को ऋणात्मक ($-\vec{b}$) भेक्टरहरूको जोड हो ।

चित्र 6.16 मा $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$

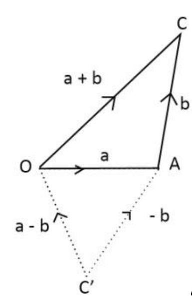
अथवा, $\overrightarrow{AC}=\vec{a}+\vec{b}$

यदि $\overrightarrow{BC}$ र $\overrightarrow{BC'}$ एकअर्काका ऋणात्मक भेक्टर भए $\overrightarrow{BC'}=-\overrightarrow{BC}=-\vec{b}$

अब, $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}-(-\overrightarrow{BC'})$

Or, $\vec{a}-\vec{b}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC'}$

$\therefore \vec{a}-\vec{b}=\overrightarrow{AC'}$



चित्र 6.16

फेरि, यदि $\vec{a}=\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}$ र $\vec{b}=\begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix}$ भए

$-\vec{b}=\begin{pmatrix}-x_2\\-y_2\end{pmatrix}$

अब, $\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})$

$=\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-x_2\\-y_2\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}x_1+(-x_2)\\y_1+(y_2)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1-x_2\\y_1-y_2\end{pmatrix}$

त्यसैले लहर भेक्टरहरूको घटाउ क्रियामा x – खण्डबाट x – खण्ड र y – खण्डबाट y – खण्ड घटाइन्छ ।

जस्तै: $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ र $\vec{b} = \begin{pmatrix} o \\ 1 \end{pmatrix}$ भए $\vec{a} - \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} o \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-0 \\ -3-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$

उदाहरण 1

भेक्टर $\vec{a} = (1, -2)$ र $\vec{b} = (-3, 6)$ आपसमा समानान्तर छन् भनी प्रमाणित गर्नुहोस् ।

समाधान

यहाँ, $\vec{a} = (1, -2)$ र $\vec{b} = (-3, 6)$

Or, $\vec{b} = -3(1, -2)$

Or, $\vec{b} = -3\vec{a}$

तसर्थ, $\vec{a}$ र $\vec{b}$ आपसमा समानान्तर छन् ।

उदाहरण 2

यदि $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ र $\vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ भए $\vec{a} + \vec{b}, \vec{a} - \vec{b}$ र $2\vec{a} - 3\vec{b}$ पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान

यहाँ, $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ र $\vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$

अब, $\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-3 \\ 5+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix}$

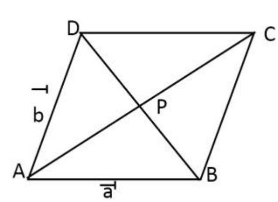
$\vec{a} - \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4+3 \\ 5-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix}$

र $2\vec{a} - 3\vec{b} = 2\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 8 \\ 10 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -9 \\ 3 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 8+9 \\ 10-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 \\ 4 \end{pmatrix}$

उदाहरण 3



सँगैको समानान्तर चतुर्भुज ABCD मा $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ र $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$ भए $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{DB}$ र $\overrightarrow{AP}$ लाई $\vec{a}$ र $\vec{b}$ को रूपमा व्यक्त गर्नुहोस् ।

समाधान

यहाँ, $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$ CB र DA समानान्तर चतुर्भुजका विपरीत भुजा भएकाले

$\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{DA} = -\overrightarrow{AD} = -\vec{b}$

भेक्टर जोडको त्रिभुज नियमअनुसार

$\overrightarrow{DB} \quad = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB}$

$= -\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB}$

$= -\vec{b} + \vec{a} = \vec{a} - \vec{b}$

पुनः भेक्टर जोडको समानान्तर चतुर्भुज नियमअनुसार

$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$

$= \vec{a} + \vec{b}$

AC **को मध्यबिन्दु** P **भएकाले**

$\overrightarrow{AP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

$= \frac{1}{2}\ (\vec{a} + \vec{b})$

उदाहरण 4

यदि बिन्दुहरू A **र** B **का स्थिति भेक्टरहरू क्रमशः** $4\vec{i} + 3\vec{j}$ **र** $5\vec{i} - 2\vec{j}$ **भए** $\overrightarrow{AB}$ **पत्ता लगाउनुहोस् ।**

समाधान

यहाँ, $\overrightarrow{OA} = 4\vec{i} + 3\vec{j}$

$\overrightarrow{OB} = 5\vec{i} - 2\vec{j}$

अब, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$

$= (5\vec{i} - 2\vec{j}) - (4\vec{i} + 3\vec{j})$ **र**

$= 5\vec{i} - 2\vec{j} - 4\vec{i} - 3\vec{j}$

$= \vec{i} - 5\vec{j}$

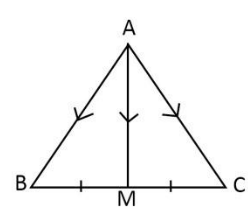
उदाहरण 5

Δ ABC **मा** BC **को मध्यबिन्दु** M **भए प्रमाणित गर्नुहोस्** $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AM}$

समाधान

यहाँ, ΔABC **मा** BC **को मध्यबिन्दु** M **हो ।**

ΔABM **मा,** $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM} - - - (i)$



ΔACM मा, $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CM} - - - (ii)$

समीकरणहरू (i) र (ii) जोड्दा,

$2\overrightarrow{\mathrm{AM}} = \overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{BM}} + \overrightarrow{\mathrm{AC}} + \overrightarrow{\mathrm{CM}}$

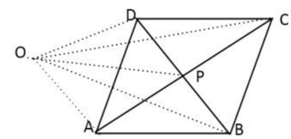
यहाँ, BC को मध्यबिन्दु M भएकाले, $\overrightarrow{\mathrm{CM}} = +\overrightarrow{\mathrm{MB}} = -\overrightarrow{\mathrm{BM}}$

त्यसैले, $2\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BM}$

$\therefore\ 2\overrightarrow{\mathrm{AM}} = \overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{AC}}$ प्रमाणित भयो ।

उदाहरण 6

सँगै दिइएको समानान्तर चतुर्भुज ABCD मा दुई विकर्णहरूको प्रतिच्छेदन बिन्दु P हो । पुनः O कुनै बिन्दु हो भने प्रमाणित गर्नुहोस् ।



$\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}} + \overrightarrow{\mathrm{OC}} + \overrightarrow{\mathrm{OD}} = 4\overrightarrow{\mathrm{OP}}$

समाधान

यहाँ, भेक्टर जोडको त्रिभुज नियमबाट

ΔAOP मा, $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{AP}} - - - -(\mathrm{i})$

ΔBOP मा $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BP} - - - -(ii)$

ΔCOP मा, $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CP} - - - -(iii)$

ΔDOP मा, $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \overrightarrow{\mathrm{OD}} + \overrightarrow{\mathrm{DP}} - - - -(\mathrm{iv})$

अब समीकरणहरू (i), (ii), (iii) र (iv) जोड्दा

$4\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{AP}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}} + \overrightarrow{\mathrm{BP}} + \overrightarrow{\mathrm{OC}} + \overrightarrow{\mathrm{CP}} + \overrightarrow{\mathrm{OD}} + \overrightarrow{\mathrm{DP}}$

P दुई विकर्णहरूको मध्यबिन्दु भएकाले

$\overrightarrow{BP} = -\overrightarrow{DP}$ र $\overrightarrow{\mathrm{AP}} = -\overrightarrow{\mathrm{CP}}$

त्यसैले, $4\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{CP} + \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{DP} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CP} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{DP}$

$\therefore 4\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}$ प्रमाणित भयो ।

अभ्यास 6.3

1. यदि $\vec{a} = (4, -2)$ भए निम्न भेक्टरहरू पत्ता लगाउनुहोस् :

   (a) $3\vec{a}$ (b) $\frac{1}{2}\vec{a}$ (c) $\frac{3}{2}\vec{a}$

2. तलका जोडा भेक्टरहरू आपसमा समानान्तर छन् भनी प्रमाणित गर्नुहोस् :

   (a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} -10 \\ 6 \end{pmatrix}$ (b) $\vec{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \vec{d} = \begin{pmatrix} -3/2 \\ 1 \end{pmatrix}$

3. यदि $\vec{a} = 3\vec{i} - 2\vec{j}, \vec{b} = 6\vec{i} + k\vec{j}$ र $\vec{a} \parallel \vec{b}$ भए k को मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

4. यदि $\vec{a} = (1,2)$ र $\vec{b} = (-3,4)$ भए तलका भेक्टरहरू पत्ता लगाउनुहोस् :

   (a) $\vec{a} + \vec{b}$ (b) $\vec{a} - \vec{b}$ (c) $\vec{b} - \vec{a}$

   (d) $2\vec{a} + \vec{b}$ (e) $3\vec{a} - 2\vec{b}$ (f) $\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{3}{2}\vec{b}$

5. (a) यदि $\vec{a} - \vec{b} = (12, 4)$ र $\vec{b} = (5,7)$ भए $\vec{a}$ पत्ता लगाउनुहोस् ।

   (b) यदि $\vec{a} + \vec{b} = (5, 1)$ र $\vec{a} = (0,4)$ भए $\vec{b}$ पत्ता लगाउनुहोस् ।

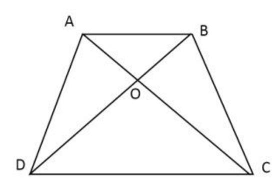
   (c) यदि $2\vec{a} + 3\vec{b} = (0, -7)$ र $\vec{b} = (2, -3)$ भए $\vec{a}$ पत्ता लगाउनुहोस् ।

6. यदि $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ ले A(-3,0) लाई B(-2,4) मा र $\overrightarrow{CD}$ ले C(4,1) लाई D(0,5) मा विस्थापन गर्छन् भने $\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{CD}}$ र $\overrightarrow{\mathrm{AB}} - \overrightarrow{\mathrm{CD}}$ पत्ता लगाउनुहोस् ।

7. यदि $\vec{a} = (-2, 1), \vec{b} = (7, -3)$ र m = 2 भए सिद्ध गर्नुहोस् :

   (a) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ (b) $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + c$

   (c) $m(\vec{a} + \vec{b}) = (m\vec{a} + m\vec{b})$



8. सँगैको चित्रमा तलका भेक्टहरू पत्ता लगाउनुहोस् :

   (a) $\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{BC}}$ (b) $\overrightarrow{\mathrm{DO}} + \overrightarrow{\mathrm{OC}}$ (c) $\overrightarrow{\mathrm{DC}} + \overrightarrow{\mathrm{CA}}$

   (d) $\overrightarrow{\mathrm{DO}} + \overrightarrow{\mathrm{AD}}$

9. यदि $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = (-5, 7)$ र $\overrightarrow{BC} = (2,1)$ भए $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ पत्ता लगाउनुहोस् ।

10. (a) यदि $\overrightarrow{\mathrm{OA}} = (2, -3)$ र $\overrightarrow{\mathrm{OB}} = (0,2)$ भए यदि $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ पत्ता लगाउनुहोस् ।

    (b) यदि बिन्दुहरू A र B का स्थिति भेक्टरहरू क्रमशः $\mathrm{i} + 2\mathrm{j}$ र $3\vec{i} - \vec{j}$ भए $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ पत्ता लगाउनुहोस् ।

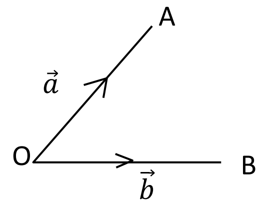
    (c) यदि P को स्थिति भेक्टर $4\vec{a} - 3\vec{b}$ र Q को स्थिति भेक्टर $2\vec{a} + 5\vec{b}$ भए $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ पत्ता लगाउनुहोस् ।

(d) यदि $\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ र $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \end{pmatrix}$ भए $\overrightarrow{OB}$ पत्ता लगाउनुहोस् ।

11. सँगैको चित्रमा तलका क्रियाहरू देखाउने गरी छुट्टाछुट्टै तीर चित्र खिच्नुहोस् ।

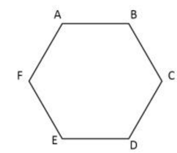
(a) $\vec{a} + \vec{b}$ (b) $\vec{a} - \vec{b}$

(c) $\vec{b} - \vec{a}$ (d) $2\vec{a} + \vec{b}$

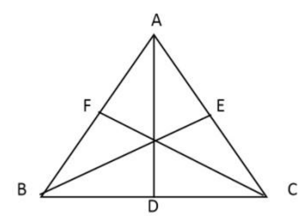


12. सँगैको नियमित षड्भुजमा यदि $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ र $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$ भए तलका भेक्टरहरू $\vec{a}$ र $\vec{b}$ मा व्यक्त गर्नुहोस् :

(a) $\overrightarrow{AC}$ (b) $\overrightarrow{AD}$ (c) $\overrightarrow{AE}$ (d) $\overrightarrow{AF}$



13. एउटा नियमित पञ्चभुज ABCDE मा प्रमाणित गर्नुहोस् : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EA} = 0$



14. सँगैको $\triangle$ABC मा D, E र F क्रमशः BC, CA र BA का मध्य बिन्दुहरू भए, प्रमाणित गर्नुहोस् $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = 0$

15. भेक्टरहरूको जोड र घटाउलाई बीज गणित र मेट्रिक्सहरूको जोड घटाउसँग तुलना गर्नुहोस् । भेक्टरलाई स्केलरले गुणन गर्न मिले झैँ के दुई भेक्टरहरू गुणन गर्न मिल्छ ? भेक्टर गुणनका बारेमा अध्ययन गर्नुहोस् । शिक्षकसँग परामर्श लिई प्रतिवेदन तयार पारी कक्षामा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

16. दैनिक जीवनमा भेक्टर क्रियाहरूको प्रयोग कहाँ कहाँ हुन्छ ? खोजी गर्नुहोस् र एक प्रतिवेदन तयार पारी कक्षामा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

एकाइ **7**

स्थानान्तरण (Transformation)

7.0 पुनरावलोकन (Review)

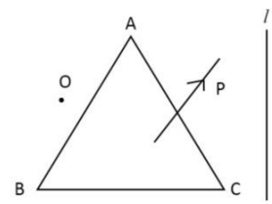
तलका प्रश्नहरू समूहमा छलफल गर्नुहोस् :

(a) स्थानान्तरण भनेको के हो ? यो कति प्रकारको हुन्छ ?

(b) दिइएका चित्र 7.1 मा $\triangle ABC$ लाई

(i) रेखा l (परार्वतन अक्ष) मा परार्वतन गर्दा कहाँ र कस्तो प्रतिबिम्ब बन्छ ?

(ii) ऋणात्मक दिशामा बिन्दु O को वरिपरि $90°$ परिक्रमण गर्दा कहाँ र कस्तो प्रतिबिम्ब बन्छ ?



चित्र न. 7.1

(iii) भेक्टर $\underset{p}{\rightarrow}$ को परिमाण र दिशामा विस्थापन गर्दा कहाँ र कस्तो प्रतिबिम्ब बन्छ ?

(c) कुनै ज्यामितीय आकृतिलाई परावर्तन/परिक्रमण/विस्थापन गर्दा आउने प्रतिबिम्ब आकृतिसँग समरूप वा अनुरूप के हुन्छ, किन ?

(d) कुनै बिन्दु A(4, - 5) लाई (a) x – अक्ष (b) y – अक्षबाट परावर्तन गरी बनेको प्रतिबिम्बको निर्देशाङ्क कति हुन्छ ।

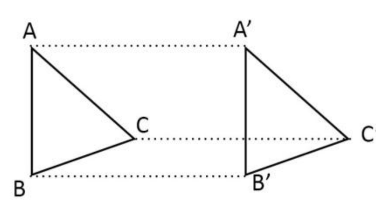
7.1 स्थानान्तरणको परिचय (Transformation)

कुनै वस्तु ऐनामा हेर्दा त्यसको प्रतिबिम्ब देखिन्छ । घडीमा मिनेट सुई 0 मिनेटबाट $90°$ ऋणात्मक घुमेर 15 मिनेटमा पुग्छ । तपाईंले टेबलको एक कुनाबाट आफ्नो किताब अर्को कुनामा सार्नुभयो भने किताबको स्थिति परिर्वतन हुन्छ । थोरै हावा भएको बेलुन फुक्दा बेलुनको आकार बढ्छ ।

माथि उल्लिखित घटनाहरूमा वस्तुको तुलनामा प्रतिबिम्बको स्थिति वा आकार परिर्वतन भएका छन् । यस प्रकारका परिर्वतन नै स्थानान्तरण हुन् ।

स्थानान्तरणले कुनै निश्चित गुणका आधारमा कुनै ज्यामितीय आकृतिको स्थिति वा आकार दुवैमा परिवर्तन ल्याउँछ ।

सँगैको चित्र 7.2 मा $\triangle ABC$ को स्थानान्तरण पछिको प्रतिबिम्ब $\triangle A'B'C'$ हो, जहाँ A, B र C का प्रतिबिम्ब क्रमशः A', B' र C' हुन् । कुनै ज्यामितीय आकृतिलाई स्थानान्तरण गराउँदा आकृतिका प्रत्येक बिन्दुको प्रतिबिम्बमा सङ्गत बिन्दु हुन्छ ।



चित्र न. 7.2

बीज गणितमा फलनले पहिलो समूहका प्रत्येक सदस्य x को दोस्रो समूहको कुनै एक सदस्य y सँग सम्बन्ध राखे झैँ ज्यामितिमा स्थानान्तारणले कुनै वस्तुको प्रत्येक बिन्दु x ले त्यसको प्रतिबिम्बको कुनै एक बिन्द x' सँग सम्बन्ध राख्छ । त्यसैले, स्थानान्तरणलाई मिलान (mapping) पनि भनिन्छ ।

स्थानान्तरणका प्रकार

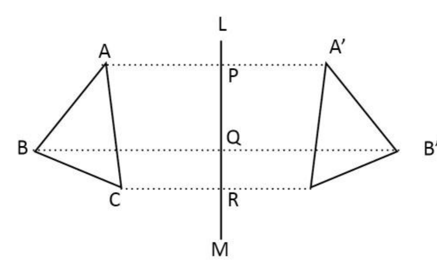
बन्द गरिएको ढोका खोल्दा ढोकाको स्थितिमा परिर्वतन आउँछ । के ढोकाको आकारमा पनि परिर्वतन हुन्छ ? बेलुन फुकेपछि त्यसको आकार बढ्छ । यसरी स्थानान्तरणपछि आकृतिको तुलनमा प्रतिबिम्बको स्थिति वा आकार वा दुवैमा परिर्वतन आउँछ । यसैका आधारमा स्थानान्तरणलाई सममितीय (isometric) र असममितीय (non-isometric) गरी दुई भागमा विभाजन गरिन्छ :

(i) सममितीय स्थानान्तरण **(Isometric transformation)** : जुन स्थानान्तरणपछि आकृतिको तुलनामा प्रतिबिम्बको स्थितिमा परिर्वतन आउँछ तर आकारमा परिर्वतन आउँदैन, त्यसैलाई सममितीय (isometric) स्थानान्तरण भनिन्छ । यसमा आकृति र प्रतिबिम्ब अनुरूप हुन्छन् । यो स्थानान्तरणअन्तर्गत परावर्तन, परिक्रमण र विस्थापन पर्दछन् ।

(ii) असममितीय स्थानान्तरण **(Non-isometric transformation)** : जुन स्थानान्तरणपछि आकृतिको तुलनमा प्रतिबिम्बको आकारमा परिर्वतन आउँछ त्यसलाई असममितीय (Non -isometric) स्थानान्तरण भनिन्छ । यो स्थानान्तरणअन्तर्गत विस्तार पर्दछ ।

7.2 परावर्तन (Reflection)

सँगैको चित्र 7.3 मा ΔABC लाई परावर्तनको अक्ष रेखा LM मा परावर्तन गरेपछि प्रतिबिम्ब $\Delta A'B'C'$ बनेको छ । चित्रका आधारमा निम्न प्रश्नहरूमाथि छलफल गर्नुहोस् :



चित्र न. 7.3

(a) AP, A'P; BQ, B'Q र CR, C'R नाप्नुहोस् । के परिणाम आउँछ पत्ता लगाउनुहोस् ।

(b) $\angle APL$, $\angle BQL$ र $\angle CRL$ नाप्नुहोस्, के परिणाम आउँछ पत्ता लगाउनुहोस् ।

(c) के ΔABC र $\Delta A'B'C'$ अनुरूप र समरूप छन्, किन ?

माथिका प्रश्नहरूको उत्तरका आधारमा परार्वतनका निम्न गुणहरू लेख्न सकिन्छ :

1. वस्तु र प्रतिबिम्ब परार्वतन अक्षबाट समान दुरीमा हुन्छन् । अर्थात AP = A'P, BQ = B'Q, CR = C'R
2. वस्तु र प्रतिबिम्ब उल्टो आकृतिका रूपमा हुन्छन् ।
3. वस्तु र त्यसको प्रतिबिम्ब जोड्ने रेखा परावर्तन अक्षसँग लम्ब हुन्छ । अर्थात $AA' \perp LM$, $BB' \perp LM$ र $CC' \perp LM$

4. वस्तु र त्यसको परावर्तनको प्रतिबिम्हरू अनुरूप हुन्छन् ।

5. परार्वतन अक्षमा पर्ने बिन्दु अपरिवर्तनीय हुन्छन् ।

हामीले निर्देशाङ्कबाट पनि x – अक्ष र y – अक्षबाट हुने परावर्तनका बारेमा अध्ययन गरिसक्यौँ । त्यसैले :

$$P(x, y) \xrightarrow{Re: x-axix} P'(x, -y)$$
$$P(x, y) \xrightarrow{Re: y-axix} P'(-x, y)$$

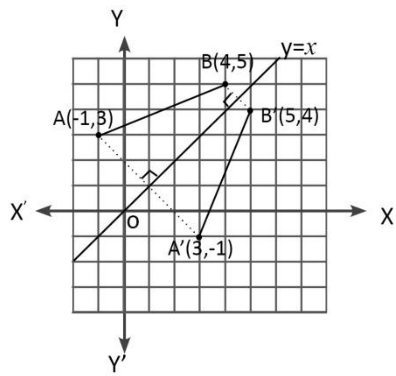
अब थप अरू रेखाबाट परावर्तनका बारेमा जानकारी लिन्छौँ ।

(क) रेखा **y =** x बाट परावर्तन

y = x कस्तो रेखा हो ? छलफल गर्नुहोस् ।

y = x त्यस्तो X रेखा हो जसका प्रत्येक बिन्दुका x - र y- निर्देशााङ्क बराबर [(0,0), (1, 1), (-2, -2) आदि] हुन्छन् ।

सँगैको चित्र 7.4 मा रेखा AB का बिन्दुहरू A(-1,3) र B(4,5) लाई y = x रेखामा परावर्तन गराउँदा आउने प्रतिबिम्ब A'B' का बिन्दुहरू A' र B' का निर्देशाङ्क कति छन् ? बिन्दुहरू A र B का निदेशाङ्क कति हुन्छ ? A(-1, 3) को प्रतिबिम्ब A'(3, -1) र B(4, 5) को प्रतिबिम्ब A'(5, 4) छन् । यहाँ प्रतिबिम्बका निर्देशाङ्कहरूको स्थान बदलिएको छ । त्यसैले, P(x, y) लाई y = x रेखामा परार्वतन गर्दा प्रतिबिम्बि P(y, x) हुन्छ ।



चित्र न. 7.4

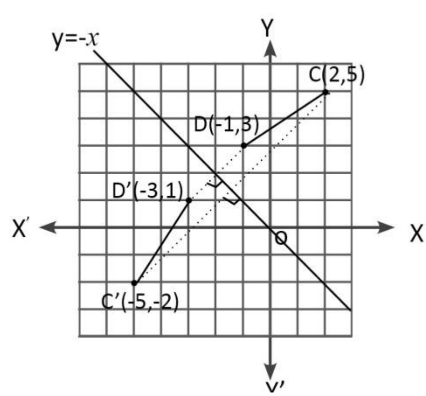
अर्थात, $P(x, y) \xrightarrow{Re: y=x} \mathrm{P}'(y, x)$

(ख) रेखा **y = x** बाट परार्वतन

y = -x कस्तो रेखा हो ? छलफल गर्नुहोस् ।

सँगैको चित्र 7.5 मा देखाइएको रेखा y = -x त्यस्तो रेखा हो जसका प्रत्येक बिन्दुमा x र y- निर्देशाङ्कका परिमाण बराबर छन् तर विपरीत चिह्न छन् [(0, 0), (1, -1), (-2, 2)]

चित्र 7.5 मा रेखा CD का बिन्द्हरू C(2, 5) र D(-1, 3) लाई y = -x रेखामा परार्वतन गराउँदा आउने प्रतिबिम्ब C' र D' का निर्देशाङ्क कति छन् ? C(2, 5) का प्रतिबिम्बि C'(-5. -2), D(-1, 3) को प्रतिबिम्ब D(-3, 1) छन् ।



चित्र न. 7.5

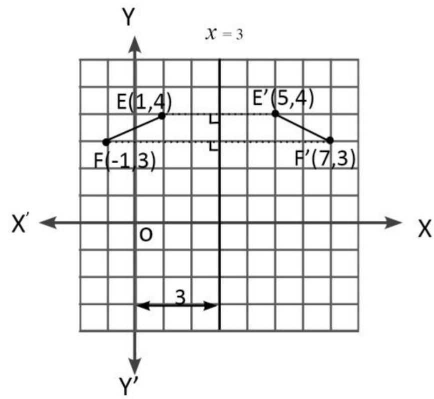
यहाँ प्रतिबिम्बका निर्देशाङ्कहरूको स्थान बदलिनुका साथै चिह्न पनि बदलिएका छन् । त्यसैले P(x, y) लाई y= -x रेखामा परार्वतन गर्दा प्रतिबिम्ब P(-y,-x) हुन्छ ।

अर्थात, $P(x,y) \xrightarrow{Re:y=-x} P'(-y,-x)$

(ग) **रेखा x = a बाट परावर्तन**

x = a कस्तो रेखा हो ? छलफल गर्नुहोस् ।

सँगैको चित्र 7.6 मा x = 3 रेखा देखाइएको छ जसका प्रत्येक बिन्दुमा x – निर्देशाङ्क उही (3) र y – निर्देशाङ्क फरक फरक छन् । चित्रमा रेखा EF का बिन्दुहरू E(1, 4) र F(-1, 3) लाई x = 3 रेखामा परावर्तन गराउँदा आउने प्रतिबिम्ब E'F' का बिन्दुहरू E' र F' का निर्देशाङ्क कति छन् ? E(1,4) को प्रतिबिम्ब E'(5, 4) = F'(2 × 3 -1, 4) र F(-1, 3) को प्रतिबिम्ब F'(7, 3) = F' [2 × 3 – (-1), 3] यहाँ आकृति र प्रतिबिम्बका y – निर्देशाङ्क उही छन् भने x – निर्देशाङ्क फरक छन् । कारण के होला ? छलफल गर्नुहोस् ।



चित्र न. 7.6

त्यसैले, P(x, y) लाई x = a रेखामा परावर्तन गराउँदा प्रतिबिम्ब P'(2a - x, y) हुन्छ ।

अर्थात,$P(x,y) \xrightarrow{Re:x=a} P'(2a-x,y)$

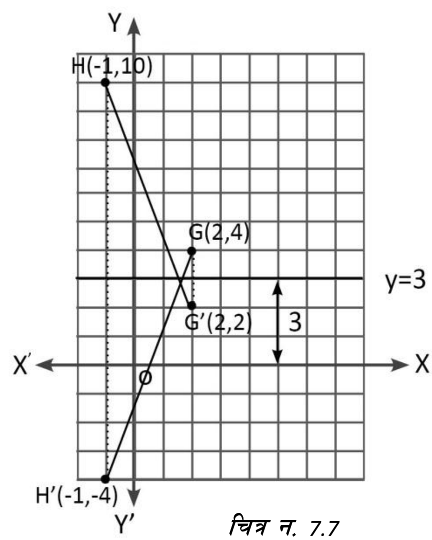
(घ) **रेखा y = b बाट परावर्तन**

y = b कस्तो रेखा हो ? छलफल गर्नुहोस् ।

सँगैको चित्र 7.7 मा y =3 रेखा देखाइएको छ । जसका प्रत्येक बिन्दुका y – निर्देशाङ्क उही (3) र x – निर्देशाङ्क फरक फरक छन् चित्रमा रेखा GH का बिन्दुहरू G(2, 4) र H(-1, -4) लाई y = 3 रेखामा परावर्तन गराउँदा आउने प्रतिबिम्ब G'H' का बिन्दुहरू G' र H' का निर्देशाङ्क कति कति छन् ?

G(2, 4) को प्रतिबिम्ब G'(2, 2) = G'(2, 2 × 3 - 4)
H(-1, -4) को प्रतिबिम्ब
H' (-1, 10)= H' [-1, 2×3 -(-4)]

यहाँ, आकृति र प्रतिबिम्बका x – निर्देशाङ्क उही छन् भने y – निर्देशाङ्क फरक छन् कारण के होला ? छलफल गर्नुहोस् ।



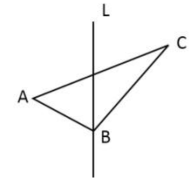
चित्र न. 7.7

त्यसैले, P(x, y) लाई y = b रेखामा परावर्तन गराउँदा प्रतिबिम्ब P'(x, 2b - y) हुन्छ ।

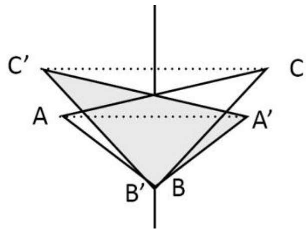
अर्थात $P(x,y) \xrightarrow{Re: y=b} P'(x, 2b-y)$

उदाहरण 1

दिइएको चित्रमा ∆ABC लाई परार्वतन अक्ष L मा परार्वतन गराउनुहोस् :



समाधान



यहाँ, छाया पारेर देखाइएको ∆A'B'C' नै ∆ABC को प्रतिबिम्ब हो ।

उदाहरण 2

∆ABC का शीर्षबिन्दुहरू A(2, -1), B(-3, 0) र C(-4, -2) छन् । ∆ABC लाई रेखा y = x मा परावर्तन गर्दा बन्ने प्रतिबिम्ब ∆A'B'C' को शीर्षबिन्दुहरूका निर्देशाङ्क लेख्नुहोस् र दुवै त्रिभुजलाई लेखाचित्रमा देखाउनुहोस् ।

समाधान

यहाँ, हामीलाई थाहा छ,

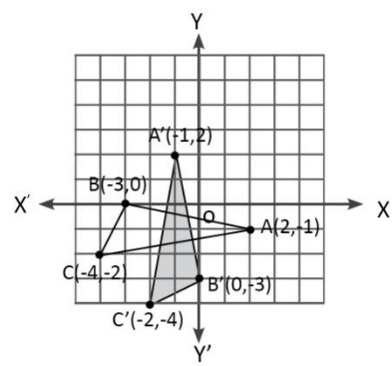
$$P(x,y) \xrightarrow{Re: y=x} P'(y,x)$$

त्यसैले, $\mathrm{A}(2,-1) \rightarrow \mathrm{A}'(-1,2$

$\mathrm{B}(-3,0) \rightarrow \mathrm{B}'(0,-3)$

$\mathrm{C}(-4,-2) \rightarrow \mathrm{C}'(-2,-4)$

∆ABC र प्रतिबिम्ब ∆A'B'C' लाई सँगैको लेखाचित्रमा देखाइएको छ ।



उदाहरण 3

∆ABC का शीर्षबिन्दुहरू A(5, 3), B(-1, -2) र C(-3. 2) छन् ।

(a) ∆ABC लाई y = -x रेखामा परावर्तन गर्दा बन्ने प्रतिबिम्ब ∆A'B'C' को शीर्षबिन्दुहरूका निर्देशाङ्क लेख्नुहोस् ।

(b) पुन: ∆A'B'C' लाई x = -3 रेखामा परावर्तन गर्दा बन्ने प्रतिबिम्ब ∆A"B"C" को शीर्षबिन्दुहरूका निर्देशाङ्क लेख्नुहोस् । ∆ABC, ∆A'B'C' र ∆A"B"C" लाई एउटै लेखाचित्रमा देखाउनुहोस् ।

समाधान

(a) हामीलाई थाहा छ,

$$P(x,y) \xrightarrow{Re:y=-x} P'(-y,-x)$$

त्यसैले, $A(5,3) \rightarrow A'(-3,-5)$

$B(-1,-2) \rightarrow B'(2,1)$

$C(-3,2) \rightarrow C'(-2,3)$

(b) हामीलाई थाहा छ,

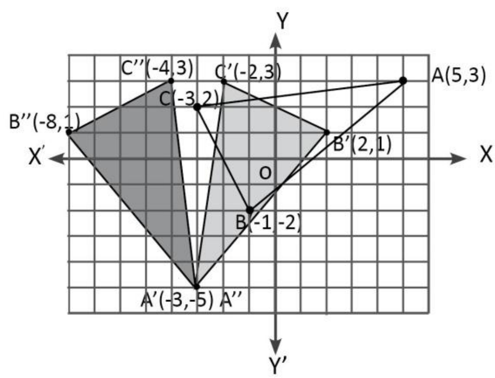
$$P(x,y) \xrightarrow{Re:x=a} P'(2a-x,y)$$

त्यसैले, $A'(-3,-5) \xrightarrow{Re:x=-3} A''[2\times(-3)-(-3),-5 = A''(-3,-5)$

$B(2,1) \xrightarrow{Re:x=-3} B''[2\times(-3)-2,1] = B''(-8,1)$

$C'(-2,3) \xrightarrow{Re:x=-3} C''[2\times(-3)-(-2),3] = C'(-4,3)$

ΔABC, ΔA'B'C' र ΔA" B" C" लाई तलको लेखाचित्रमा देखाइएको छ :



उदाहरण 4

यदि Q(-1, 3), R(-2,-3), S(3, 2) र T(3, 5) चतुर्भुज QRST को शीर्षबिन्दुहरू हुन् । चतुर्भुज QRST लाई y = 2 रेखामा परावर्तन गर्दा बन्ने प्रतिबिम्ब चतुर्भुजको शीर्षबिन्दुहरूका निर्देशाङ्क लेखी दुवै चतुर्भुजलाई लेखाचित्रमा देखाउनुहोस् ।

समाधान

यहाँ, हामीलाई थाहा छ,

$$P(x,y) \xrightarrow{Re:y=b} P'(x,2b-y)$$

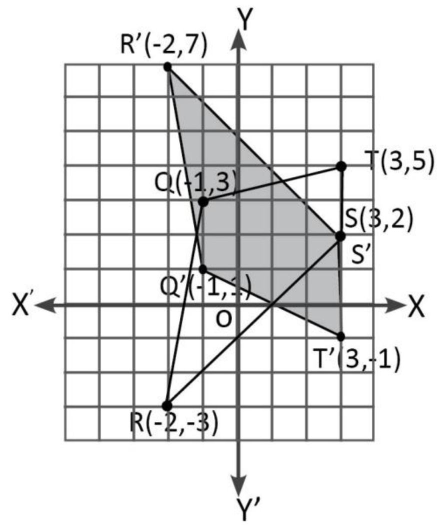
त्यसैले, $Q(-1,3) \xrightarrow{Re:y=2} Q'(-1,2\times2-3) = Q'(-1,1)$

$R(-2,-3) \xrightarrow{Re: y=2} R'[-2, 2\times 2-(-3)] = R'(-2,7)$

$S(3,2) \xrightarrow{Re: y=2} S'(3, 2\times 2-2) = S'(3,2)$

$T(3,5) \xrightarrow{Re: y=2} T'(3, 2\times 2-5) = T'(3,-1)$

चतुर्भुज QRST र प्रतिबिम्ब चतुर्भुज Q'R'S'T' लाई तलको लेखाचित्रमा देखाइएको छ ।



उदाहरण 5

(a) यदि परावर्तन R_1 ले A(3, 5) लाई A' (-3, 5) मा लैजान्छ भने परावर्तनको अक्ष पत्ता लगाउनुहोस् ।

(b) यदि परावर्तन R_2 ले B(5, -2) लाई B' (-2, 5) मा लैजान्छ भने परावर्तनको अक्ष पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान

(a) यहाँ, A(3, 5) $\xrightarrow{R_1} A'(-3,5)$

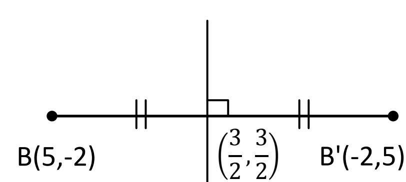
हामीलाई थाहा छ, $P(x,y) \xrightarrow{Re: y-\text{axix}} P'(-x,y)$

दिइएको आकृति र प्रतिबिम्बका निर्देशाङ्क y –अक्षमा भएको परावर्तनसँग मिल्ने भएकाले R_1 ले y – अक्षमा भएको परावर्तन जनाउँछ ।

(b) यहाँ, $B(5,-2) \xrightarrow{R_2} B'(-2,5)$

मानौं R_2 ले रेखा l मा भएको परावर्तन जनाउँछ ।

सँगैको चित्रबाट, BB' को मध्यबिन्दुको निर्देशाङ्क = $\left(\frac{5-2}{2}, -\frac{-2+5}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$



र BB' को झुकाव = $\frac{5+2}{-2-5} = \frac{7}{-7} = -1$

$\therefore$ l को झुकाव (m) = 1 (किन ?) अब, झुकाब (m) = 1 र बिन्दु (x_1, y_1) = $\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$ भएर जाने रेखा l को समीकरण $y - y_1 = m(x - x_1)$

Or, $y - \frac{3}{2} = 1(x - \frac{3}{2})$

$\therefore$ $y = x$

त्यसैले, R_2 ले रेखा $y = x$ मा हुने परावर्तन जनाउँछ ।

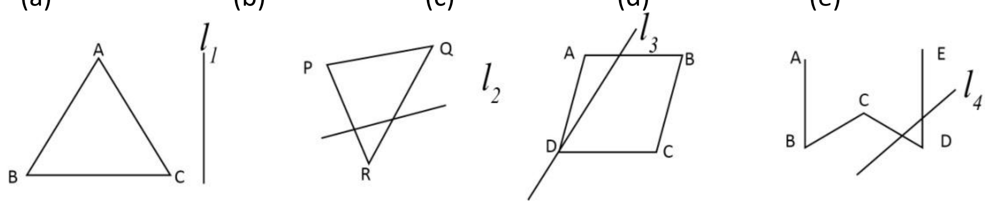
अभ्यास 7.1

1. (a) स्थानान्तरण भनेको के हो ? उदाहरणसहित लेख्नुहोस् ।

   (b) परावर्तनको परिभाषा लेखी यसका 3 ओटा गुणहरू उल्लेख गर्नुहोस् ।

2. तल दिइएका ज्यामितीय आकृतिहरूलाई दिइएको रेखामा परावर्तन गर्नुहोस् र प्रतिबिम्बलाई छाया गर्नुहोस् :

   (a) (b) (c) (d) (e)



3. बिन्दुहरू A(1, 2), B(-3,0), C(4,2), D(-5, -3), E(2, -3) लाई तलका अवस्थाहरूमा परावर्तन गर्दा बन्ने प्रतिबिम्बका निर्देशाङ्क लेख्नुहोस् :

   (a) x – अक्ष (b) y – अक्ष (c) रेखा $y = x$ (d) रेखा $y = -x$ (e) रेखा $x = -3$ (f) रेखा $y = 5$

4. यदि ΔABC का शीर्षबिन्दुहरू A(-2,0), B(6,2) र C(5, 3) भए

   (a) ΔABC लाई रेखा $y = x$ मा परावर्तन गर्दा बन्ने प्रतिबिम्ब ΔA'B'C' का शीर्षबिन्दुहरूका निर्देशाङ्क लेख्नुहोस् ।

   (b) ΔABC लाई रेखा $x = 4$ मा परावर्तन गर्दा बन्ने प्रतिबिम्ब ΔA'B'C' को शीर्षबिन्दुहरूका निर्देशाङ्क लेख्नुहोस् ।

   (c) ΔABC लाई $y = -2$ रेखामा परावर्तन गर्दा बन्ने प्रतिबिम्ब ΔA'B'C' को शीर्षबिन्दुहरूका निर्देशाङ्क लेख्नुहोस् ।

   माथिका अवस्थाहरूमा प्रत्येक आकृति र त्यसको प्रतिबिम्ब लेखाचित्रमा देखाउनुहोस् ।

5. P(-1,3), Q (-3, -1), R(3, -4) र S(2, 1) एउटा चतुर्भुज PQRS का शीर्षबिन्दुहरू हुन् :

(a) चतुर्भुज PQRS लाई रेखा y = -x मा परावर्तन गर्दा बन्ने प्रतिबिम्बको शीर्षबिन्दुहरूका निर्देशाङ्क लेख्नुहोस् र दुवै आकृति र प्रतिबिम्बलाई एउटै लेखाचित्रमा देखाउनुहोस् ।

(b) चतुर्भुज PQRS लाई रेखा x = 1 मा परावर्तन गर्दा बन्ने प्रतिबिम्बको शीर्षबिन्दुहरूका निर्देशाङ्क लेख्नुहोस् र दुवै आकृति र प्रतिबिम्बलाई एउटै लेखाचित्रमा देखाउनुहोस् ।

6. तलका अवस्थाहरूमा परावर्तनका अक्ष पत्ता लगाउनुहोस् :

(a) $A(3,5) \overset{R_1}{\rightarrow} A'(-5,-3)$ (b) $B(2,-1) \overset{R_2}{\rightarrow} B'(4,,-1)$

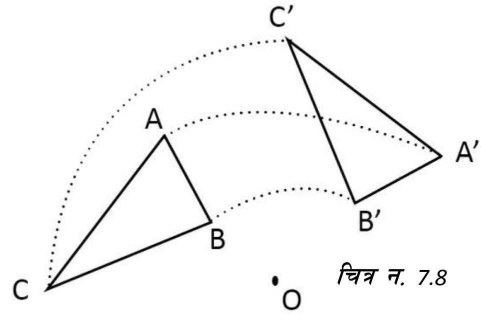
(c) $C(5,7) \overset{R_3}{\rightarrow} C'(-5,7)$ (d) $D(-3,4) \overset{R_4}{\rightarrow} D'(-3,-8)$

7. ∆ABC का शीर्षबिन्दुहरू A(2, 3), B(3, 2) र C(1, 1) छन् । ∆ABC लाई y – अक्षमा परार्वतन गर्दा बन्ने प्रतिबिम्ब ∆A'B'C' लाई पुन : x =-3 मा परावर्तन गर्दा बन्ने प्रतिबिम्ब ∆A" B" C" को शीर्षबिन्दुहरूका निर्देशाङ्क लेख्नुहोस् । तिन ओटै त्रिभुजहरूलाई एउटै लेखाचित्रमा देखाउनुहोस् ।

8. ∆XYZ लाई परावर्तन गर्दा ∆X' Y' Z' बन्छ जहाँ ∆X' Y' Z' को शीर्षबिन्दुहरू x' (4, -2), Y' (8, -2) र Z' (8, 4) छन् । यदि ∆XYZ को एउटा शीर्षबिन्दु x(2, -4) भए बाँकी शीर्षबिन्दुहरू पत्ता लगाउनुहोस् । साथै परावर्तनको अक्ष पनि पत्ता लगाउनुहोस् ।

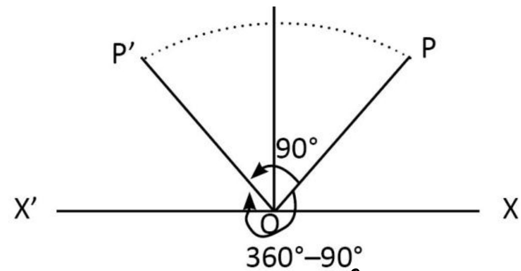
9. परावर्तनका गुणहरू के के छन् ? समतल ऐनामा हेर्दा आकृति र प्रतिबिम्ब एक अर्काका दायाँ बायाँ उल्टा हुन्छन् तर तलमाथि उल्टा किन हुँदैनन् ? दैनिक जीवनमा परावर्तनको प्रयोग कहाँ कहाँ हुन्छ ? समूहमा छलफल गरी एक लेख तयार पारी कक्षामा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

7.3 परिक्रमण (Rotation)



चित्र न. 7.8

सँगैको चित्र 7.8 मा ΔABC लाई बिन्दु O को वरिपरि ऋणात्मक परिक्रमण गराउँदा $\Delta A'B'C'$ बनेको छ । साथै चित्र 7.9 मा बिन्दु P लाई उद्गम बिन्दुको वरिपरि धनात्मक 90° परिक्रमण गराउँदा प्रतिबिम्ब P' बनेको छ ।



चित्र न. 7.9

चित्रका आधारमा निम्न प्रश्नहरूमा छलफल गर्नुहोस् ।

(a) के ΔABC का प्रत्येक बिन्दु एउटै दिशामा उत्तिकै कोणिक विस्थापन भएका छन् ?

(b) AA', BB' र CC' जोड्नुहोस् र यी तिन ओटै रेखाहरूको लम्बार्धक खिच्नुहोस् । के तिनीहरू एउटै बिन्दुमा मिलन भए ?

(c) बिन्दु P' लाई उद्गम बिन्दुको वरिपरि कति डिग्री ऋणात्मक परिक्रमण गराउँदा प्रतिबिम्ब P' नै बन्छ ?

(d) ΔABC र $\Delta A'B'C'$ अनुरूप वा समरूप के छन्, किन ?

माथिका प्रश्नहरूका उत्तरका आधारमा परिक्रमणका निम्न लिखित गुणहरू लेख्न सकिन्छ :

(a) परिक्रमणले समतल सतहमा रहेका ज्यामितीय आकृतिका प्रत्येक बिन्दुलाई एउटै दिशामा र उत्तिकै कोणिक विस्थापन गर्छ ।

(b) परिक्रमणले आकृति र प्रतिबिम्बका सङ्गत बिन्दुहरू जोड्ने रेखाको लम्बार्धक परिक्रमणको केन्द्रबिन्दु भएर जान्छ ।

(c) वस्तु र त्यसको परिक्रमणको प्रतिबिम्ब अनुरूप हुन्छन् ।

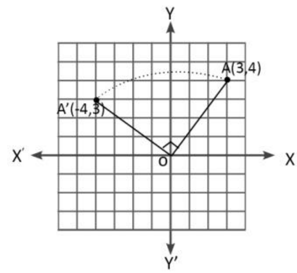
(d) परिक्रमणको केन्द्र मात्र एउटा अपरिवर्तनीय बिन्दु हुन्छ ।

(e) कुनै बिन्दुबाट $\theta°$ ले ऋणात्मक दिशा (घडीको सुई घुम्ने दिशा) मा भएको परिक्रमण नै त्यही बिन्दुबाट $(360° - \theta°)$ ले धनात्मक दिशा (घडीको सुई घुम्ने दिशाको उल्टो दिशा) मा भएको परिक्रमण हो ।

परिक्रमणमा निर्देशाङ्कको प्रयोग

(a) उद्गम बिन्दु **0(0,0)** बाट **+90°** मा परिक्रमण (धनात्मक एक चौथाइ परिक्रमण)

सँगैको चित्र 7.10 मा बिन्दु A(3, 4) लाई धनात्मक दिशामा उद्गम बिन्दु 0 को वरिपरि 90° परिक्रमण गर्दा बन्ने प्रतिबिम्ब A' को निर्देशाङ्क कति छ ?



A' को निर्देशाङ्क (-4, 3) छ । यहाँ, x - र y- निर्देशाङ्क साटिएका छन् र x – निर्देशाङ्कको चिह्न बदलिएको छ । त्यसैले, P(x, y) लाई 0 को वरिपरि धनात्मक चौथाइ परिक्रमण गराउँदा प्रतिबिम्ब P'(-y, x) हुन्छ ।

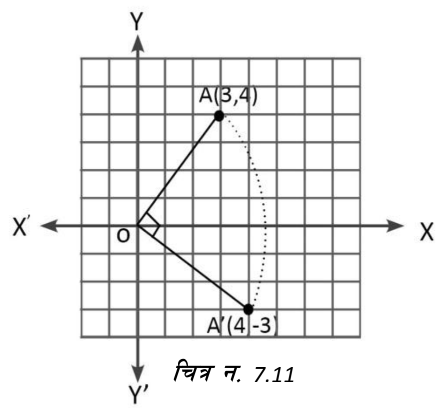
अर्थात, P(x, y) $\xrightarrow{R_0:[0,+90°]} P'(-y, x)$

चित्र न. 7.10

अत: +90° परिक्रमण भनेकै – 270° परिक्रमण हो, किन होला ? छलफल गर्नुहोस् ।

(b) उद्गम बिन्दु **0(0,0)** बाट **-90°** मा परिक्रमण (ऋणात्मक एक चौँथाइ परिक्रमण)

सँगैको चित्र 7.11 मा बिन्दु A(3,4) लाई ऋणात्मक दिशामा उद्गम बिन्दु O को वरिपरि 90° परिक्रमण गर्दा बन्ने प्रतिबिम्ब A' को निर्देशाङ्क कति छ ?



चित्र न. 7.11

A' को निर्देशाङ्क (4,-3) छ । यहाँ, x र y निर्देशाङ्क साटिएका छन् र y – निर्देशाङ्कको चिह्न बदलिएको छ ।

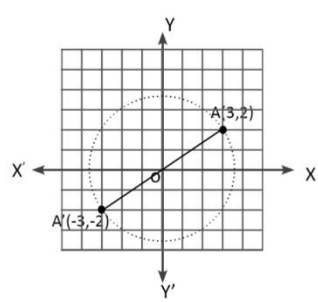
त्यसले, P(x, y) लाई 0 को वरिपरि ऋणात्मक एक चौथाइ परिक्रमण गराउँदा प्रतिबिम्ब P'(y, -x) हुन्छ,

अर्थात, $P(x, y) \xrightarrow{R_0:[0,-90°]} P'(y, -x)$

अत: -90° परिक्रमण भनेकै -270° परिक्रमण हो, किन होला ? छलफल गर्नुहोस् ।

(c) उद्गम बिन्दु **0(0,0)** बाट **180°** मा परिक्रमण (अर्ध परिक्रमण)

सँगैको चित्र 7.12 मा बिन्दु A(3, 2) लाई उद्गम बिन्दुको वरिपरि 180° परिक्रमण गर्दा प्रतिबिम्ब A' बनेको छ । A' को निर्देशाङ्क कति छ ?



A' को निर्देशाङ्क (-3, -2) छ । यहाँ, प्रतिबिम्बका निर्देशाङ्कको परिमाण उही छ तर चिह्न बदलिएका छन् । त्यसैले, P(x, y) लाई 0 को वरिपरि 180 ° परिक्रमण गराउँदा प्रतिबिम्ब $P'(-x, -y)$ हुन्छ ।

चित्र : 7.12

अर्थात् $P(x,y) \xrightarrow{Ro:[0,180^0]} P'(-x,-y)$

+180° र - 180° परिक्रमण गर्दा कुनै बिन्दुको प्रतिबिम्बमा के फरक पर्छ ? छलफल गर्नुहोस् ।

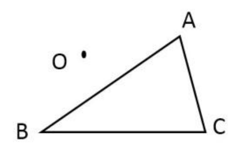
(d) उद्गम बिन्दु **0(0,0)** बाट **360°** परिक्रमण (पूर्ण परिक्रमण)

कुनै बिन्दुलाई अर्को बिन्दुको वरिपरि पूर्ण परिक्रमण गराउँदा उक्त बिन्दु कहाँ पुग्ला ?

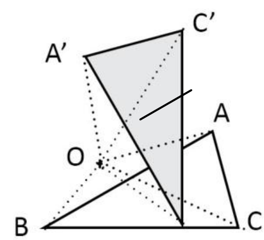
कुनै बिन्दुले 360° परिक्रमण गरेपछि आफ्नो पहिलेकै स्थानमा आइपुग्छ । त्यसैले 360° परिक्रमण गर्दा बिन्दु अपरिवर्तनीय हुन्छ । +360° र -360° परिक्रमण एउटै हुन् । किन होला ? छलफल गर्नुहोस् ।

उदाहरण 1

सँगैको ΔABC लाई दिइएको बिन्दु O को वरिपरि +90 ° मा परिक्रमण गराउनुहोस् ।



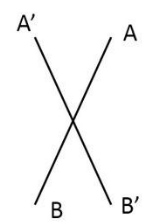
समाधान



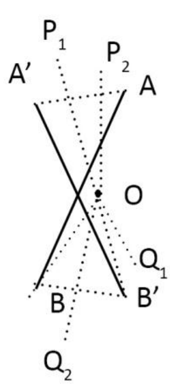
यहाँ छाया पारेर देखाइएको ΔA'B'C' नै ΔABC को प्रतिबिम्ब हो ।

उदाहरण **2**

सँगैको चित्रमा रेखाखण्ड AB लाई कुनै बिन्दुको वरिपरि परिक्रमण प्रतिबिम्ब A'B' बनेको छ भने परिक्रमणको केन्द्रबिन्दु र परिक्रमण कोण पत्ता लगाउनुहोस् ।



समाधान



यहाँ,

(a) AA' र BB' जोड्नुहोस् ।

(b) AA' को लम्बार्धक P_1,Q_1 र BB' को लम्बार्धक $P_2\,Q_2$ खिच्नुहोस् ।

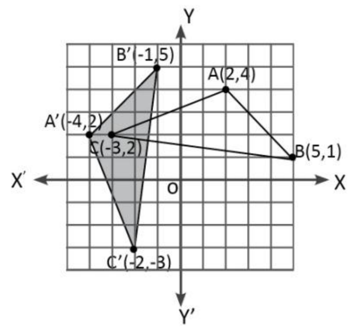
(c) P_1Q_1 र P_2Q_2 काटिएको बिन्दु 0 नै परिक्रमणको केन्द्रबिन्दु हो ।

(d) AO र A'O जोड्नुहोस् र $\angle AOA' = \angle BOB'$ नाप्नुहोस् जुन परिक्रमणको कोण हो ।

उदाहरण 3

शीर्षबिन्दुहरू A(2, 4), B(5, 1) र C(-3, 2) भएको ΔABC लाई उद्गम बिन्दुको वरिपरि धनात्मक दिशामा चौथाइ परिक्रमण गर्दा बन्ने प्रतिबिम्ब $\Delta A'B'C'$ का शीर्षबिन्दुहरूका निर्देशाङ्क लेख्नुहोस् । ΔABC र $\Delta A'B'C'$ लाई एउटै लेखाचित्रमा देखाउनुहोस् ।

समाधान



यहाँ, हामीलाई थाहा छ,

$$P(x,y) \xrightarrow{R_0:[0,+90°]} P'(-y,x)$$

त्यसैले, $A(2,4) \rightarrow A'(-4,2)$

$B(5,1) \rightarrow B'(-1,5)$

$C(-3,2) \rightarrow C'(-2,-3)$

ΔABC र प्रतिबिम्ब $\Delta A'B'C'$ लाई सँगैको लेखाचित्रमा देखाइएको छ ।

उदाहरण 4

ΔPQR का शीर्षबिन्दुहरू P(-4, 6), Q(-1, -2) र R(3, -5) छन् । ΔPQR लाई उद्गम बिन्दुको वरिपरि घडीको सुई घुम्ने दिशामा 90° परिक्रमण गर्दा बन्ने प्रतिबिम्ब $\Delta P'Q'R'$ को शीर्षबिन्दुहरूका निर्देशाङ्क लेखी दुवै त्रिभुजलाई लेखाचित्रमा देखाउनुहोस् ।

समाधान

हामीलाई थाहा छ, $P(x,y) \xrightarrow{R_0[0,-90°]} P'(y,-x)$

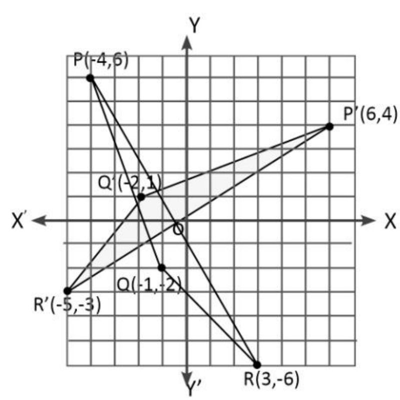
त्यसैले,

P(-4, 6) $\rightarrow$ p'(6,4)

Q(-1, -2) $\rightarrow$ Q'(-2, 1)

R(3, -5) $\rightarrow$ R' (-5,-3)

ΔPQR र $\Delta P'Q'R'$ लाई सँगैको लेखाचित्रमा देखाइएको छ ।



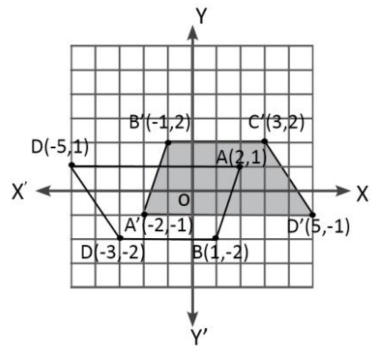
उदाहरण 5

A(2, 1), B(1, -2), C(-3, -2) र D(-5, 1) समलम्ब चतुर्भुज ABCD का शीर्षबिन्दुहरू हुन् । ABCD लाई उद्गम बिन्दुको वरिपरि 180°ले परिक्रमण गर्दा बन्ने प्रतिबिम्ब चतुर्भुजको शीर्षबिन्दुहरूका निर्देशाङ्क लेखी दुवै चतुर्भुजलाई लेखाचित्रमा देखाउनुहोस् ।

समाधान

यहाँ, हामीलाई थाहा छ,

$$P(x, y) \xrightarrow{R_0[0, -180°]} P'(-x, -y)$$



त्यसैले,

A(2, 1) $\rightarrow$ A'(-2, -1)

B(1, -2) $\rightarrow$ B'(-1, 2)

C(-3, -2) $\rightarrow$ C' (3,2)

D(-5, 1) $\rightarrow$ D' (5, -1)

चतुर्भुजहरू ABCD र A'B'CD' लाई सँगैको लेखाचित्रमा देखाइएको छ ।

उदाहरण 6

यदि बिन्दु A(-4, 3) लाई उद्गम बिन्दुको वरिपरि परिक्रमण गरेर प्रतिबिम्ब A'(3, 4) हुन्छ भने परिक्रमणको कोण र दिशा पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान

यहाँ, A(-4, 3) $\rightarrow$ A'(3, 4)

अर्थात

p(x, y) $\rightarrow$ P'(y,-x)

यो सम्बन्धले उद्गम बिन्दुको वरिपरि ऋणात्मक दिशामा भएको एक चौथाइ (-90°) परिक्रमण जनाउँछ ।

उदाहरण 7

A(2, 3), B(1, 5) र C(-2, 4) शीर्षबिन्दुहरू भएको ∆ABC लाई रेखा y = x मा परावर्तन गरी प्रतिबिम्ब ∆A'B'C' पाइयो । फेरि, ∆A'B'C' लाई उद्गम बिन्दुको वरिपरि धनात्मक दिशामा चौथाइ परिक्रमण गरी प्रतिबिम्ब ∆A"B"C" पाइयो । ∆A'B'C' र A"B"C" का शीर्षबिन्दुहरूका निर्देशाङ्क लेखी तिन ओटै त्रिभुजलाई लेखाचित्रमा देखाउनुहोस् ।

समाधान

यहाँ, A(2, 3), B(1,5) र C(-2, 4) ∆ABC का शीर्षबिन्दुहरू हुन् ।

हामीलाई थाहाँ छ, $P(x, y) \xrightarrow{Re: y=x} P'(y, x)$

त्यसैले,

A(2, 3) → A'(3. 2)

B(1, 5) → B'(5, 1)

C(-2, 4) → C'(4, -2)

हामीलाई थाहा छ,

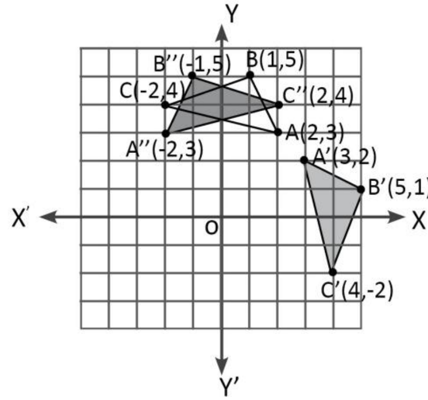
$P(x, y) \xrightarrow{R_O:[o,+90°]} P'(-y, x)$

त्यसैले,

A'(3, 2) →A"(-2, 3)

B'(5, 1) →B"(–1, 5)

C'(4, -2) → C"(2,4)



अब, ΔABC, ΔA'B'C'र ΔA"B"C" लाई सँगैको लेखाचित्रमा देखाइएको छ ।

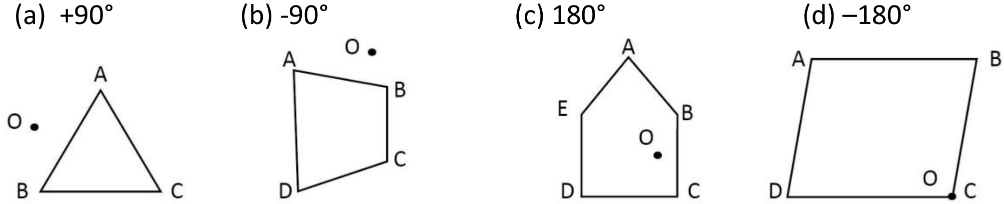
अभ्यास 7.2

1.(a) परिक्रमणलाई परिभाषित गरी यसका गुणहरू लेख्नुहोस् ।

(b) कुनै बिन्दु P(x, y) लाई उद्गम बिन्दुको वरिपरि +90° मा परिक्रमण गर्दा आउने प्रतिबिम्बलाई पुनः+180° मा परिक्रमण गर्दा आउने प्रतिबिम्बको निर्देशाङ्क कति हुन्छ, लेख्नुहोस् ।

2. तलका ज्यामितीय आकृतिहरूलाई दिइएको बिन्दु O को वरिपरि दिइएको दिशामा दिइएको कोणले परिक्रमण गराउनुहोस् :

(a) +90° (b) -90° (c) 180° (d) –180°



3. बिन्दुहरू P(7, 5), Q(-3, 4), R(-1-3), S(6, -3) र T(-4, 7) लाई उद्गम बिन्दुको वरिपरि तलका अवस्थाहरूमा परिक्रमणपछि बन्ने प्रतिबिम्बहरूका शीर्षबिन्दुहरूको निर्देशाङ्क लेख्नुहोस् :

(a) +90° (b) -90° (c) 180° (d) 360°

4. ΔABC का शीर्षकबिन्दुहरू A(1, 0), B(4, 5) र C(7, -2) छन् । ΔABC का प्रतिबिम्बहरूका शीर्षबिन्दुहरूको निर्देशाङ्क पत्ता लगाउनुहोस् ।

(a) यदि ΔABC लाई उद्गम बिन्दुको वरिपरि घडीको सुई घुम्ने दिशामा एक चौथाइ परिक्रमण गराइएको छ ।

(b) यदि ΔABC लाई उद्गम बिन्दुको वरिपरि $180°$ ले परिक्रमण गराइएको छ ।

(c) यदि ΔABC लाई उद्गम बिन्दुको वरिपरि $+90°$ ले परिक्रमण गराइएको छ ।

5. A(3, 7), B(1, -1) र C(6, 8) ΔABC का शीर्षबिन्दुहरू हुन् । ΔABC लाई उद्गम बिन्दुको वरिपरि धनात्मक दिशामा अर्ध परिक्रमण गराउँदा बन्ने प्रतिबिम्ब त्रिभुजको शीर्षबिन्दुहरूका निर्देशाङ्क लेख्नुहोस् र दुवै त्रिभुजलाई लेखाचित्रमा देखाउनुहोस् ।

6. समानान्तर चतुर्भुजका शीर्षबिन्दुहरू A(2,1), B(5, 1) C(4, 4) र D(1, 4) छन् । ABCD लाई उद्गम बिन्दुको वरिपरि $-90°$ ले परिक्रमण गर्दा बन्ने प्रतिबिम्बको शीर्षबिन्दुहरूका निर्देशाङ्क लेख्नुहोस् र दुवै चतुर्भुजलाई एउटै लेखाचित्रमा देखाउनुहोस् ।

7. यदि R_1, R_2, R_3 र R_4 ले उद्गम बिन्दुको वरिपरि हुने परिक्रमणलाई जनाउँछ भने परिक्रमणको कोण र दिशा पत्ता लगाउनुहोस् ।

(a) $A(-3, 4) \xrightarrow{R_1} A'(3, -4)$ (b) $B(4, 5) \xrightarrow{R_2} B'(-5, 4)$

(c) $C(-1,-2) \xrightarrow{R_3} c'(-2, 1)$ (d) $D(6, -7) \xrightarrow{R_4} D'(6, -7)$

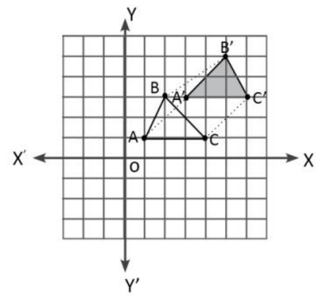
8. (a) A(5, 2), B(3, 1) र C(2, -4) शीर्षबिन्दुहरू भएको ΔABC छ । ΔABC लाई उद्गम बिन्दुको वरिपरि $+90°$ ले परिक्रमण गर्दा $\Delta A'B'C'$ बन्छ र $\Delta A'B'C'$ लाई उद्गम बिन्दुको वरिपरि $180°$ ले परिक्रमण गर्दा $\Delta A''B''C''$ बन्छ भने $\Delta A'B'C$ र $\Delta A''B''C''$ का शीर्षबिन्दुहरूका निर्देशाङ्क लेखी लेखाचित्रमा देखाउनुहोस् ।

(b) ΔPQR का शीषबिन्दुहरू P(3, 4), Q(-2, 6) र R (1, -5) छन् । ΔPQR लाई रेखा $x = -2$ मा परावर्तन गरी बन्ने प्रतिबिम्ब $\Delta P'Q'R'$ लाई फेरि उद्गम बिन्दुको वरिपरि $+270°$ ले परिक्रमण गराउँदा $\Delta P''Q''R''$ बन्छ भने $\Delta P'Q'R$ र $\Delta P''Q''R''$ का शीर्षबिन्दुहरूका निर्देशाङ्क पत्ता लगाई तिन ओटै त्रिभुजलाई एउटै लेखाचित्रमा देखाउनुहोस् ।

9. परावर्तन र परिक्रमणका गुणहरू तुलना गर्नुहोस् । कुनै बिन्दु P(x,y) लाई x – अक्षमा परावर्तन गर्दा आउने प्रतिबिम्बलाई फेरि y- अक्षमा परावर्तन गर्दा आउने प्रतिबिम्ब र त्यही बिन्दु P(x, y) लाई उद्गम बिन्दुको वरिपरि $180°$ ले परिक्रमण गर्दा आउने प्रतिबिम्बमा के समानता र भिन्नता छ ? दैनिक जीवनमा परिक्रमणको प्रयोग कहाँ कहाँ हुन्छ ? समूह छलफलबाट प्रतिवेदन तयार पारी कक्षामा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

7.4 विस्थापन (Translation)

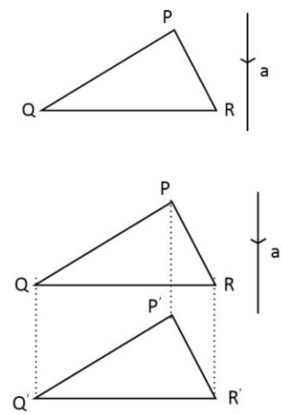
सँगैको चित्रमा ΔABC को विस्थापित प्रतिबिम्ब ΔA'B'C हो । यहाँ ΔABC का प्रत्येक शीर्षबिन्दु कति एकाइ दायाँ र कति एकाइ माथि विस्थापन भएका छन् ? छलफल गर्नुहोस् ।



चित्र न. 7.13

सँगैको चित्र 7.14 मा ΔPQR लाई दिइएको भेक्टर $\vec{a}$ को दिशा र परिमाणमा विस्थापन गर्दा कहाँ पुग्छ ?

यहाँ बिन्दुहरू P, Q र R बाट $\vec{a}$ सँग बराबर र समानान्तर हुने गरी क्रमशः $\overrightarrow{PP'}, \overrightarrow{QQ'}$ र $\overrightarrow{RR'}$ खिचेर बिन्दुहरू P', Q' र R' जोड्दा ΔP'Q'R बन्छ जुन ΔPQR को विस्थापित प्रतिबिम्ब हो ।



त्यसैले विस्थापनले कुनै पनि बिन्दु वा वस्तुलाई दिइएको दिशामा निश्चित दुरीमा स्थानान्तरण गर्दछ ।

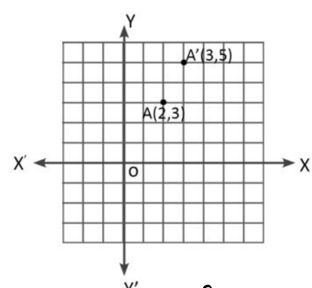
चित्र न. 7.14

के माथिका ΔPQR र ΔP'Q'R' अनुरूप छन् ? छलफल गर्नुहोस् ।

विस्थापनमा निर्देशाङ्कको प्रयोग

सँगैको चित्र 7.15 मा A(2, 3) कनै बिन्दु हो । यो बिन्दुलाई 1 एकाइ दायाँ र 2 एकाइ माथि विस्थापन गर्दा विस्थापित प्रतिबिम्बिको निर्देशाङ्क कति हुन्छ ।

यहाँ, 1 एकाइ दायाँ भन्नाले धनात्मक x – अक्षतिर र 2 एकाइमाथि भन्नाले धनात्मक y – अक्षतिर भन्ने बुझिन्छ । यसलाई जोडा सङ्ख्यामा $\binom{1}{2}$ अथवा (1, 2) ले जनाउन सकिन्छ । यसलाई विस्थापन भेक्टर भनिन्छ ।



चित्र न. 7.15

माथिको चित्र 7.15 मा A(2, 3) विस्थापन भेक्टर $\binom{1}{2}$ ले विस्थापन गर्दा प्रतिबिम्ब A'(3, 5) छ ।

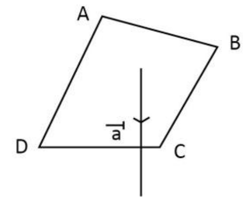
D A(2, 3) $\xrightarrow{T\binom{1}{2}} A'(3,5) = A'(2+1, 3+2)$

यसरी, विस्थापन भेक्टर $\binom{a}{b}$ ले बिन्दु P(x, y) लाई P'(x + a, y +b) मा विस्थापन गर्छ ।

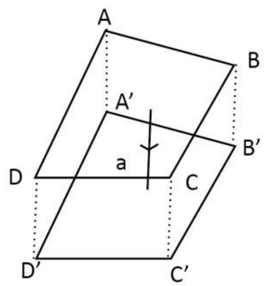
अर्थात, P(x, y) $\xrightarrow{T\binom{a}{b}} P'(x+a, y+b)$

उदाहरण 1

तलको ज्यामितीय आकृतिलाई दिइएको $\vec{a}$ को परिमाण र दिशामा विस्थापन गर्नुहोस् :



समाधान



यहाँ, चतुर्भुज ABCD को विस्थापित प्रतिबिम्ब A'B'C'D' हो ।

उदाहरण 2

बिन्दुहरू A(3, 1) र B(-4,2) लाई विस्थापन भेक्टर $T\binom{1}{4}$ ले विस्थापन गर्दा आउने प्रतिबिम्बका निर्देशाङ्क पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान

हामीलाई थाहा छ,

P(x, y) $\xrightarrow{T\binom{a}{b}} P'(x+a, y+b)$

त्यसैले,

A(3, 1) $\xrightarrow{T\binom{1}{4}} A'(3+1, 1+4) = A'(4,5)$

$\mathrm{B}(-4,2) \xrightarrow{T\binom{1}{4}} B'(-4+1, \quad 2+4) = B'(-3,6)$

उदाहरण 3

X(7, -9) र Y(-1, -1) जोड्ने रेखा XY लाई $\overrightarrow{xy}$ को परिमाण र दिशामा विस्थापन गर्दा आउने प्रतिबिम्ब X'Y' का बिन्दुहरू X' र Y' का निर्देशाङ्क लेख्नुहोस् ।

समाधान

यहाँ, X(7, -9) र Y(-1, -1) दुई बिन्दुहरू हुन् ।

$\therefore \underset{OX}{\rightarrow} = (7, -9)$ र $\underset{\text{OY}}{\rightarrow} = (-1, -1)$

त्यसैले, $\underset{\text{XY}}{\rightarrow} = \underset{\text{OY}}{\rightarrow} - \underset{\text{OX}}{\rightarrow} = (-1, -1) - (7, -9) = (-8, 8)$

अब,

X(7, -9) $\xrightarrow{\overrightarrow{\text{XY}}\binom{-8}{8}} \text{X}'(7-8, -9+8) = \text{X}'(-1, -1)$

Y(-1, -1) $\xrightarrow{\overrightarrow{\text{XY}}\binom{-8}{8}} \text{y}'(-1-8, -1+8) = \text{Y}'(-9, 7)$

उदाहरण 4

यदि M(-4, 3) **लाई कुनै विस्थापन भेक्टरले** M'(4, 4) **मा विस्थापन गर्छ भने विस्थापन भेक्टर पत्ता लगाउनुहोस् । साथै, उक्त विस्थापन भेक्टर प्रयोग गरी** N(2, -5) **को प्रतिबिम्ब पत्ता लगाउनुहोस् ।**

समाधान

मानौँ, विस्थापन भेक्टर $\text{T} = \binom{\text{a}}{\text{b}}$ **हो ।**

अब, M(-4, 3) $\xrightarrow{\text{T}\binom{\text{a}}{\text{b}}} \text{M}'(-4+\text{a}, 3+\text{b})$

तर प्रश्नअनुसार M' (4, 4) **हो ।**

त्यसैले, (4, 4) = (-4 + a,3 +b)

4 = - 4 +a   **र**   4 = 3 +b

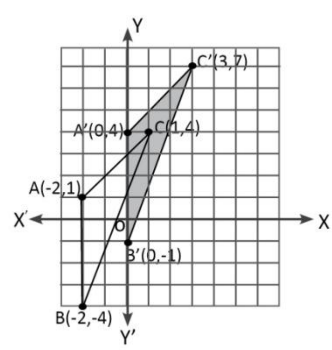
$\therefore$ a = 8   **र**   b = 1

तसर्थ, विस्थापन भेक्टर $\text{T} = \binom{8}{1}$ **हो । फेरि,** N(2, -5) $\xrightarrow{\text{T}\binom{8}{1}} \text{N}'(2+8, -5+1)$= N'(10, -4)

उदाहरण 5

यदि ΔABC **को शीर्षबिन्दुहरू** A(-2, 1)m B(-2, -4) **र** C(1, 4) **भए** ΔABC **लाई भेक्टर** T =$\binom{2}{3}$ ।

समाधान



यहाँ, A(-2, 1), B)-2, -4) **र** C(1, 4) **तथा विस्थापन भेक्टर** T =$\binom{2}{3}$,

हामीलाई थाहा छ, $\text{P}(x, y) \xrightarrow{\text{T}\binom{\text{a}}{\text{b}}} \text{P}'(x+\text{a}, \text{y}+\text{b})$

अत: $A(-2,1) \xrightarrow{\binom{2}{3}} A'(-2+2, 1+3) = A'(0,4)$

$$B(-2,-4) \xrightarrow{T\binom{2}{3}} B'(-2+2, -4+3) = B'(0,-1)$$

$$C(1,4) \xrightarrow{T\binom{2}{3}} C'(1+2, 4+3) = C'(3,7)$$

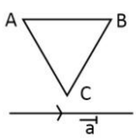
ΔABC र ΔA'B'C' लाई सँगको लेखाचित्रमा देखाइएको छ ।

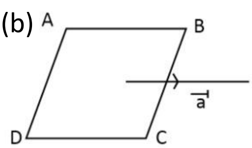
अभ्यास 7.3

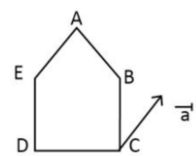
1. (a) विस्थापन भनेको के हो ? उदाहरणसहित लेख्नुहोस् ।

   (b) विस्थापन भेक्टरको परिभाषा लेख्नुहोस् ।

2. तलका ज्यामितीय आकृतिलाई दिइएको विस्थापन भेक्टर $\vec{a}$ को परिमाण र दिशामा विस्थापन गर्नुहोस् ।

   (a) 

   (b) 

   (c) 

3. यदि $T\begin{pmatrix}2\\-2\end{pmatrix}$ भेक्टरले तलका बिन्दुहरूलाई विस्थापन गर्छ भने विस्थापित प्रतिबिम्बको निर्देशाङ्क लेख्नुहोस् :

   (a) A(-1, 3) (b) B(2, -2) (c) C(5, 6) (d) D(-4,-4) (e) E(7, 2)

4. यदि P(2, 3), Q(-2, 4) र R(4, -2) शीर्षबिन्दुहरू भएको ΔPQR लाई विस्थापन भेक्टर $T\binom{3}{2}$ ले ΔP'Q'R' मा विस्थापन गर्छ भने ΔP'Q'R' को शीर्षबिन्दुहरूका निर्देशाङ्क पत्ता लगाउनुहोस् ।

5. यदि A(3, 5), B(-3, 5) र C(3, -5) भए, पत्ता लगाउनुहोस् :

   (a) $\overrightarrow{AB}$ ले बिन्दु A लाई कुन बिन्दुमा विस्थापन गर्छ ?

   (b) $\overrightarrow{BC}$ ले बिन्दु B लाई कुन बिन्दुमा विस्थापन गर्छ ?

   (c) $\overrightarrow{CA}$ ले बिन्दु C लाई कुन बिन्दुमा विस्थापन गर्छ ?

6. (a) यदि कुनै विस्थापन भेक्टरले A(-5, 6) लाई A'(-3, 3) मा विस्थापन गर्छ भने विस्थापन भेक्टर पत्ता लगाउनुहोस् ।

   (b) यदि R(4, 7) लाई कुनै विस्थापन भेक्टरले R' (-3, -5) मा विस्थापन गर्छ भने विस्थापन भेक्टर पत्ता लगाउनुहोस् । उक्त विस्थापन भेक्टरले S(4,1) लाई कुन बिन्दुमा विस्थापन गर्छ, लेख्नुहोस् ।

(c) यदि $U(5,3) \xrightarrow{T\binom{a}{b}} U'(4,2)$ भए a र b को मान पत्ता लगाउनुहोस् । $T\binom{a}{b}$ ले बिन्दु V(-5, 4) लाई कुन बिन्दुमा विस्थापन गर्छ, लेख्नुहोस् ।

7. ΔABC का शीर्षबिन्दुहरू A(1, -1), B(-2, 2) र C(3, 3) भए ΔABC लाई भेक्टर $T\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$ ले विस्थापन गर्दा बन्ने प्रतिबिम्ब ΔA'B'C' को शीर्षबिन्दुहरूका निर्देशाङ्क लेख्नुहोस् । साथै ΔABC र ΔA'B'C' लाई लेखाचित्रमा देखाउनुहोस् ।

8. कुनै ΔPQR का शीर्षबिन्दुहरू P(3, 1), Q(-1, 2) र R(4, -2) छन् । ΔPQR लाई $\overrightarrow{PR}$ को परिमाण र दिशामा विस्थापन गर्दा बन्ने त्रिभुजका शीर्षबिन्दुहरूका निर्देशाङ्क पत्ता लगाई दुवै त्रिभुजलाई एउटै लेखाचित्रमा देखाउनुहोस् ।

9. यदि A(1, 8), B(-3, 9), C(0, 13) र D(4, 12) एउटा समानान्तर चतुर्भुज ABCD का शीर्षबिन्दुहरू हुन् भने,

   (a) $\overrightarrow{AB}$ पत्ता लगाउनुहोस् ।

   (b) $\overrightarrow{AB}$ प्रयोग गरी समानान्तर चतुर्भुज ABCD लाई विस्थापन गरी बन्ने प्रतिबिम्बको शीर्षबिन्दुहरूका निर्देशाङ्क लेख्नुहोस् र दुवै चतुर्भुजलाई लेखाचित्रमा देखाउनुहोस् ।

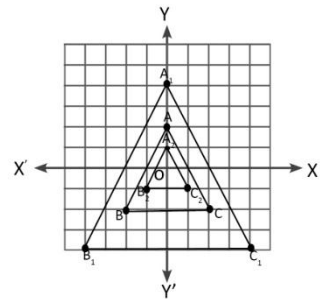
10. A(-4, 6), B(3 - 2) र C(1, 2) ΔABC का शीर्षबिन्दुहरू हुन् । ΔABC लाई $T_1\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$ भेक्टरले ΔA'B'C' मा विस्थापन गर्छ भने $T_2\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}$ भेक्टरले ΔA'B'C' लाई ΔA"B"C" मा विस्थापन गर्छ । ΔA'B'C' र ΔA"B"C" का शीर्षबिन्दुहरूका निर्देशाङ्क लेखी र तिन ओटै त्रिभुजलाई एउटै लेखाचित्रमा देखाउनुहोस् ।

11. कुनै बिन्दु P(x, y) लाई x = 1 रेखामा परार्वतन गरेर आउने प्रतिबिम्बलाई फेरि x = 3 रेखामा परावर्तन गर्दा आउने प्रतिबिम्ब र उक्त बिन्दु P(x, y) लाई विस्थापन भेक्टर T(4, 0) ले विस्थापन गर्दा आउने प्रतिबिम्ब तुलना गर्नुहोस् । यसबाट के निष्कर्ष निकाल्न सकिन्छ ?

12. विस्थापनका गुणहरू के के हुन् ? दैनिक जीवनमा विस्थापनको प्रयोग कहाँ कहाँ हुन्छ ? छलफलबाट लेख तयार पारी कक्षामा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

7.5 विस्तारीकरण (Enlargement)

सँगैको चित्र 7.16 मा O कुनै निश्चित बिन्दु हो र ΔABC एउटा त्रिभुज हो । OA, OB र OC जोड्नुहोस् । अब, $OA_1 = 2OA$, $OB_1 = 2OB$ र $OC_1 = 2OC$ हुने गरी $\Delta A_1B_1C_1$ बनाउनुहोस् ।



चित्र नं. 7.16

त्यस्तै,

$OA_2 = \frac{1}{2}OA, OB_2 = \frac{1}{2}OB$ र $OC_2 = \frac{1}{2}OC$ हुने गरी $\Delta A_2B_2C_2$ बनाउनुहोस् । के यी तिन त्रिभुजहरू अनुरूप वा समरूप छन् ? छलफल गर्नुहोस् ।

यहाँ, $A_1B_1 = 2AB$, $B_1C_1 = 2BC$, $C_1A_1 = 2CA$ र $A_2B_2 = \frac{1}{2}AB, B_2C_2 = \frac{1}{2}BC, C_2A_2 = \frac{1}{2}CA$ हुन्छ । त्यसैले, ΔABC को 2 गुणा आकार बढेको प्रतिबिम्ब $\Delta A_1B_1C_1$ हो । यहाँ 2 लाई विस्तारको नापो (scale factor (k)) भनिन्छ ।

$\therefore k = \frac{A_1B_1}{AB} = \frac{B_1C_1}{BC} = \frac{C_1A_1}{CA} = 2$

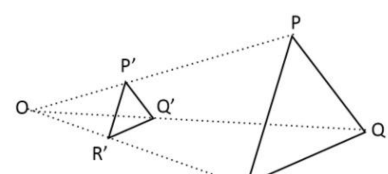
त्यस्तै, ΔABC को $\frac{1}{2}$ गुणा आकार घटेको प्रतिबिम्ब $\Delta A_2B_2C_2$ हो । यहाँ विस्तारको नापो (k) हो ।

$\therefore k = \frac{A_2B_1}{AB} = \frac{B_2C_2}{BC} = \frac{C_2A_2}{CA} = \frac{1}{2}$

यहाँ, ΔABC को आकार 'O' लाई केन्द्र बनाएर बढेको वा घटेको छ । उक्त बिन्दु 'O' लाई विस्तारीकरण केन्द्र (centre of enlargement) भनिन्छ । यहाँ, बिन्दु (A) त्यसको प्रतिबिम्ब (A_1/A_2) र विस्तारीकरण केन्द्र O एउटै रेखामा पर्दछन् ।

यसरी ज्यामितीय आकृतिको आकार निश्चित विस्तारीकरणको केन्द्र र विस्तारको नापोका आधारमा हुने परिवर्तन नै विस्तारीकरण हो ।

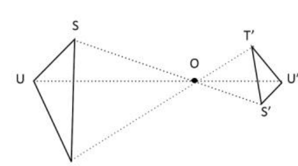
सँगैको चित्र 7.17 मा ΔPQR एक ज्यामितीय आकृति हो र O विस्तारीकरणको केन्द्र हो । यहाँ, OP, OQ र OR जोड्नुहोस् अनि $\overrightarrow{OP'}, = \frac{1}{2}\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OQ'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OQ}$ र $\overrightarrow{OR'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OR}$ हुने गरी $\Delta P'Q'R'$ बनाउनुहोस् । ΔPQR को आकार घटेको प्रतिबिम्ब $\Delta P'Q'R'$ हो, जहाँ विस्तारको नापो $k = \frac{OP'}{OP} = \frac{1}{2}$ छ ।



चित्र नं. 7.17

यहाँ, आकृति र प्रतिबिम्ब विस्तारीकरणको केन्द्रको एउटै दिशामा छन्, किन होला ? छलफल गर्नुहोस् ।

त्यस्तै चित्र 7.18 मा ΔSTU एक ज्यामितीय आकृति र O विस्तारीकरणको केन्द्र हुन् । SO, TO र UO जोड्नुहोस् अनि $\overrightarrow{S'O} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OS}, \overrightarrow{T'O} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OT}$ र $\overrightarrow{U'O} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OU}$ हुनेगरी $\Delta S'T'U'$ बनाउनुहोस् ।



चित्र नं. 7.18

यहाँ, आकृति ΔSTU र प्रतिबिम्ब ΔS'T'U' विस्तारीकरणको केन्द्रको विपरीत दिशामा छन् । त्यसैले ΔSTU को आकार घटेको प्रतिबिम्ब ΔS'T'U' हो जहाँ विस्तरको नापो k = $\frac{S'O}{SO} = \frac{-1}{2}$ छ ।

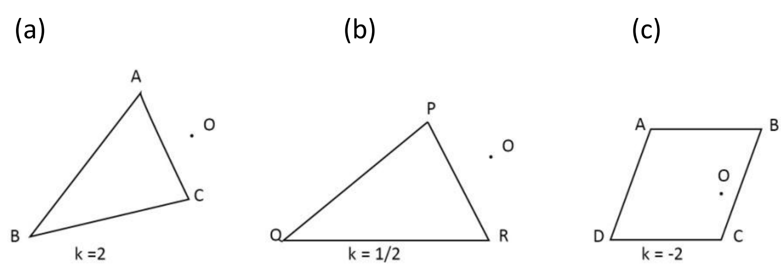
माथिको छलफलका आधारमा विस्तारीकरणका गुणहरू यस प्रकार छन् :

1. विस्तारका आकृति र प्रतिबिम्ब समरूप हुन्छन् ।
2. विस्तारको नापो k>O भए आकृति र प्रतिबिम्ब विस्तारीकरणको केन्द्रका एकै दिशामा पर्छन् ।
   (a) k > 1 भए प्रतिबिम्बको आकार बढ्छ ।
   (b) 0 < k<1 भए आकृति र प्रतिबिम्बको आकार घट्छ ।
3. विस्तारको नापो k<0 भए आकृति र प्रतिबिम्ब विस्तारीकरण केन्द्रको विपरीत दिशामा पर्दछन् र प्रतिबिम्ब आकृतिको उल्टो देखिन्छ ।
   (a) k<-1 भए प्रतिबिम्बको आकार बढ्छ ।
   (b) -1 < k< 0 भए प्रतिबिम्बको आकार घट्छ ।
4. $|k| = 1$ भए आकृति र प्रतिबिम्बको आकार बराबर हुन्छ ।
5. विस्तारीकरणको केन्द्र अपरिवर्तनीय बिन्दु हो ।

   विस्तारीकरणको केन्द्र O(0,0) र नापो k भएर हुने विस्तारीकरण लाई E(O, k) वा E[(0, 0), k] लेख्ने चलन छ ।

उदाहरण 1

तलका आकृतिहरूलाई विस्तारीकरणको केन्द्र O र दिइएको विस्तारको नापो k लिएर विस्तार गर्नुहोस् ।

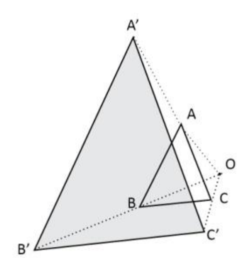


समाधान

(a) (i) AO, BO र CO जोड्नुहोस् ।

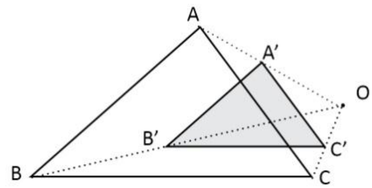
(ii) k = 2 भएकाले OA' = 2OA, OB' = 2OB र OC' = 2OC हुनेगरी A', B' र C' चिह्न लगाउनुहोस् ।

(iii) A', B' र C' जोडेर ΔA'B'C' बनाउनुहोस् जुन ΔABC को



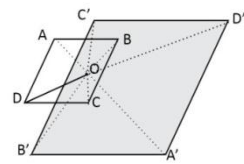
विस्तारको प्रतिबिम्ब हो ।

(b) (i) AO, BO र CO जोड्नुहोस् ।



(ii) K $= \frac{1}{2}$ भएकाले OA' $= \frac{1}{2}OA, OB' = \frac{1}{2}OB$ र OC' $= \frac{1}{2}OC$ हुनेगरी A', B' र C' चिह्न लगाउनुहोस् ।

(iii) A' B' र C' जोडन्होस् जुन ∆ABC को विस्तारित प्रतिबिम्ब हो ।



(c) यहाँ, k<O भएकाले प्रतिबिम्ब आकृतिको उल्टो हुन्छ ?

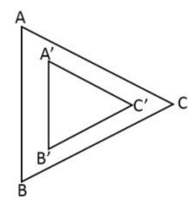
(i) AO, BO, CO र DO जोड्नुहोस् ।

(ii) $\overrightarrow{OA'} = 2\overrightarrow{OA},\ \overrightarrow{OB'} = 2\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC'} = 2\overrightarrow{OC}$ र $\overrightarrow{OD'} = 2\overrightarrow{OD'}$ हुनेगरी AO लाई C' सम्म BO लाई B' सम्म, CO लाई C' सम्म र DO लाई D' सम्म लम्ब्याउनुहोस् ।

(iii) A', B', C' र D' जोडेर चतुर्भुज A'B'C'D' बनाउनुहोस् जुन चतुर्भुज ABCD को प्रतिबिम्ब हो ।

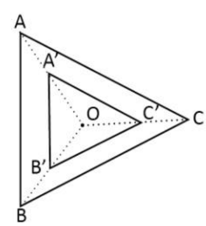
उदाहरण 2

दिइएको चित्रमा ∆ABC को प्रतिबिम्ब ∆A'B'C' भए विस्तरको केन्द्र र नापो पत्ता लगाउनुहोस् ।



समाधान

AA' BB' र CC' जोड्नुहोस् र तिनीहरूलाई बिन्दु O मा काटिने गरी लम्ब्याउनुहोस् । बिन्दु O नै विस्तारीकरणको केन्द्र हो ।



अब, OA, OA', OB, OB' र OC, OC' नाप्नुहोस् ।

$\frac{OA'}{OA} = \frac{1.2cm}{2.4cm} = \frac{1}{2}, \frac{OB'}{OB} = \frac{1.2cm}{2.4cm} = \frac{1}{2}, \frac{OC'}{OC} = \frac{1.4cm}{2.8cm} = \frac{1}{2}$

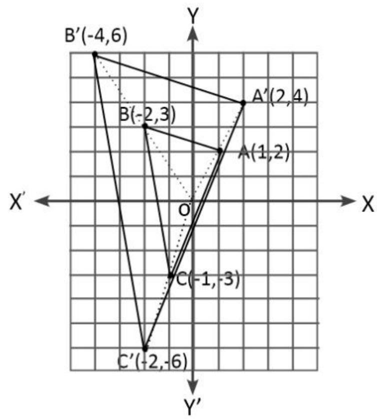
यहाँ,A र A', B र B' C र C' तथा O को एउटै दिशामा छन् ।

त्यसैले, विस्तारको नापो $k = \frac{1}{2}$ हुन्छ ।

विस्तारीकरणमा निर्देशाङ्कको प्रयोग

(i) **विस्तारीकरणको केन्द्र उद्गम बिन्दु O हुँदा**

सँगैको चित्र 7.19 मा A(1, 2), B(-2, 3) र C(-1, -3) शीर्षबिन्दु भएको $\triangle ABC$ लाई विस्तारको नापो k = 2 र केन्द्र O लिएर विस्तार गर्नुहोस् र प्रतिबिम्बको शीर्षबिन्दुहरूका निर्देशाङ्क लेख्नुहोस् ।



चित्र नं. 7.19

यहाँ, $A(1,2) \xrightarrow{E[0,2]} A'(2,4) = A'(2 \times 1, 2 \times 2)$

$B(-2,3) \xrightarrow{E[0,2]} B'(-4,6) = B'(2 \times (-2), 2 \times 3)$

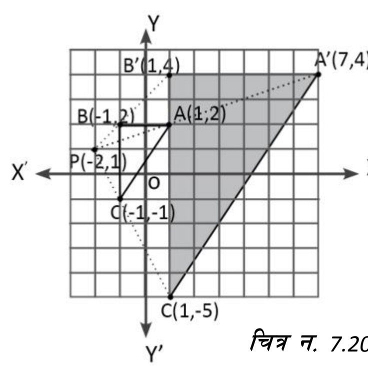
$C(-1,-3) \xrightarrow{E[0,2]} C'(-2,-6) = C'(2 \times (-1), 2 \times (-3))$

यहाँ, प्रतिबिम्बका x - र y – निर्देशाङ्क आकृतिका सङ्गत x - र y- निर्देशाङ्कको 2 (नापो = k) गुणा छन् । यस आधारमा विस्तारीकरणको केन्द्र उद्गम बिन्दु 0 र नापो k हुँदा P(x, y) को प्रतिबिम्ब P'(kx, ky) हुन्छ ।

अर्थात् $P(x,y) \xrightarrow{E[0,k]} P'(kx,ky)$ हुन्छ ।

(ii) **विस्तारीकरणको केन्द्र कुनै बिन्दु (a, b) हुँदा**

सँगैको चित्र 7.20 मा A(1, 2), B(-1, 2) र C(-1, -1) शीर्षबिन्दुहरू भएको $\triangle ABC$ लाई k = 3 र केन्द्र P(-2, 1) लिएर विस्तार गर्नुहोस् र प्रतिबिम्बको शीर्षबिन्दुहरूका निर्देशाङ्क लेख्नुहोस् ।



चित्र नं. 7.20

यहाँ,

$A(1,2) \xrightarrow{E[(-2,1),3]} A'(7,4) = A'[3 \times 1 - (3-1)(-2), 3 \times 2 - (3-1)1]$

$B(-1,2) \xrightarrow{E[(-2,1),3]} B'(1,4) = B'[3 \times (-1) - (3-1)(-2), 3 \times 2 - (3-1)1]$

$C(-1,-1) \xrightarrow{E[(-2,1),3]} C'(1,-5) = C'[3 \times (-1) - (3-1)(-2), 3 \times (-1) - (3-1)1]$

यस आधारमा विस्तारीकरणको केन्द्र (a, b) र नापो k हुँदा P(x, y) को प्रतिबिम्ब P' [kx-(k-1)a, ky-(k- 1)b] हुन्छ ।

अर्थात, $P(x, y) \xrightarrow{E[(a,b),k]} P'[kx-(k-1)a, ky-(k-1)b]$

मानौँ, A(x, y) लाई नापो k र केन्द्र P(a, b) लिएर विस्तार गर्दा प्रतिबिम्ब A'(x', y') बन्छ ।

यहाँ, $\overrightarrow{OA} = (x, y)$

$\overrightarrow{OA'} = (x', y')$

$\overrightarrow{OP} = (a, b)$

अनि, $\overrightarrow{PA} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OP} = (x-a, y-b)$

र $\overrightarrow{PA'} = \overrightarrow{OA'} - \overrightarrow{OP} = (x'-a, y'-b)$

अब, $\overrightarrow{PA'} = k\overrightarrow{PA}$

or, (x' – a, y' -b) = k (x – a, y - b)

or, x'- a = k(x - a) र y' – b = k(y - b)

or, x' = kx - ka + a or, y' = ky – kb + b

∴ x' = kx – (k - 1) a ∴ y' = ky – (k - 1) b

त्यसैले, A(x, y) $\xrightarrow{\mathrm{E[P(a,b),k]}} \mathrm{A'[kx-(k-1)a, ky-(k-1)b]}$

= A'(kx - ka + a, ky - kb + b)

उदाहरण 3

बिन्दु A(-3, 4) र B(5, 8) लाई तलका अवस्थाहरूमा विस्तारीकरण गर्नुहोस् :

(a) E (0, 3) (b) E$\left[0, \frac{1}{2}\right]$ (c) E[(1, 2), 2]

समाधान

यहाँ, A(-3, 4) र B(5, 8) दिइएका बिन्दुहरू हुन् ।

हामीलाई थाहा छ,

P(x, y) $\xrightarrow{E[o,k]} P'(kx, ky)$

विस्तारीकरणको केन्द्र र नापो E[0, 3] हुँदा,

अब, A(-3, 4) $\xrightarrow{E[0,3]} A'(3\times(-3), 3\times 4) = A'(-9, 12)$

B(5, 8) $\xrightarrow{E[0,3]} B'[3\times 5, 3\times 8] = B'(15, 24)$

(b) विस्तारीकरणको केन्द्र र नापो $E[0, \frac{1}{2}]$ हुँदा

A(-3, 4) $\xrightarrow{E[0,\frac{1}{2}]} A'[\frac{1}{2} \times (-3), \frac{1}{2} \times 4] = A'(-\frac{3}{2}, 2)$

B(5, 8) $\xrightarrow{E[0,\frac{1}{2}]} B'[\frac{1}{2} \times 5,\ \frac{1}{2} \times 8] = B'(\frac{5}{2}, 4)$

(a) विस्तारीकरणको केन्द्र र नापो E[(1, 2), 2} हुँदा

हामीलाई थाहा छ, $P(x, y) \xrightarrow{E[(a,b),k]} P'[kx - (k-1)a,\ ky - (k-1)b]$

अब, $A(-3, 4) \xrightarrow{E[(1,\ 2),2]} A'[2 \times (-3) - (2-1)1, 2\ \times 4 - (2-1)2]$

= A' (-7, 6)

$B(5, 8) \xrightarrow{E[(1,\ 2),2]} B'[2 \times 5 - (2-1)1, 2 \times 8 - (2-1)\ 2]$

= B'(9, 14)

उदाहरण 4

A(-2, -1), B(2, 3) र C(1, 1) बिन्दुहरू ∆ABC का शीर्षबिन्दुहरू हुन् । विस्तारीकरणको केन्द्र O(0,0) र विस्तारको नापो k = 3 लिएर ∆ABC को विस्तारित प्रतिबिम्बको शीर्षबिन्दुहरूका निर्देशाङ्क पत्ता लगाउनुहोस् र दुवै त्रिभुजलाई एउटै लेखाचित्रमा देखाउनुहोस् ।

समाधान

यहाँ, ∆ABC का शीर्षबिन्दुहरू A(-2, -1), B(2, 3), C(1, -1)

विस्तारीकरण केन्द्र O र विस्तारको नापो k = 3

हामीलाई थाहा छ,

P(x, y) $\xrightarrow{E[(0,\ k)]} P'(kx, ky)$

अब, A(-2, -1) $\xrightarrow{E[(0,\ 3)]} A'[3 \times (-2), 3 \times (-1)] = A'(-6, -3)$

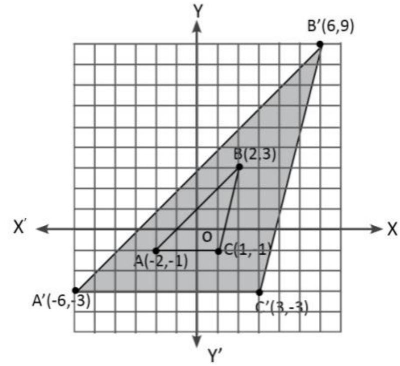
B(2, 3) $\xrightarrow{E[(0,\ 3)]} B'[3 \times 2, 3 \times 3] = B'(6, 9)$

C(1, -1) $\xrightarrow{E[(0,\ 3)]} C'[3 \times 1, 3 \times (-1)] = C'(3, -3)$

∆ABC र ∆A'B'C लाई सँगैको लेखाचित्रमा देखाइएको छ ।

उदाहरण 5

ΔPQR का शीर्षबिन्दुहरू P(3, 0), Q(0, 2) र R (3, 2) छन् विस्तारीकरणको (1, 1) र विस्तारको नापो k = -2 लिएर ΔPQR को विस्तारको प्रतिबिम्ब ΔP'Q'R' को शीर्षबिन्दुहरूका निर्देशाङ्क लेख्नुहोस् । साथै दुवै त्रिभुजलाई लेखाचित्रमा देखाउनुहोस् ।



समाधान

यहाँ P(3, 0), Q(0, 2) र R(3, 2) बिन्दुहरू ΔPQR का शीर्षबिन्दुहरू हुन् । विस्तारको केन्द्र = (1, 1) र k = -2

हामीलाई थाहा छ, $P(x,y)\xrightarrow{E[(a,b),k]}\mathrm{P}'(\mathrm{kx}-(\mathrm{k}-1)\mathrm{a},\mathrm{ky}-(\mathrm{k}-1)\mathrm{b})$

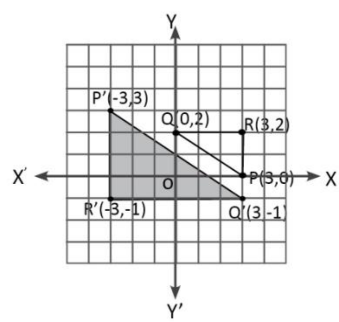
त्यसैले,

$$P(3,0)\xrightarrow{E[(1,1),-2]}P'(-2\times 3-(-2-1),-2\times 0-(-2-1)1)=P'(-3,3)$$

$$Q(0,2)\xrightarrow{E[(1,1),-2]}Q'(-2\times 0-(-2-1)\,1,-2\times 2-(-2-1)1)=Q'(3,-1)$$

$$R(3,2)\xrightarrow{E[(1,1),-2]}R'(-2\times 3-(-2-1),-2\times 2-(-2-1)1)=R'(-3,-1)$$

ΔPQR र प्रतिबिम्ब ΔP'Q'R' लाई लेखाचित्रमा देखाइएको छ ।



उदाहरण 6

एउटा विस्तारीकरणले बिन्दु A(2, 3) लाई A' (6, 9) र B(1, 4) लाई B' (3, 12) मा विस्तार गर्छ भने विस्तारीकरणको केन्द्र र नापो पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान

मानौँ विस्तारीकरणको केन्द्र (a, b) र विस्तरको नापो k छ ।

अब,

$$A(2,3)\xrightarrow{E[(a,b),\ k]}A'[k\times 2-(k-1)a,k\times 3-(k-1)b]=A'(6,9)$$

$\therefore$ 2k – (k-1) a = 6 . . . . (i) र 3k – (k-1)b = 9 . . . . (iii)

र $B(1,4) \xrightarrow{E[(a,b),\ k]} B'(k \times 1-(k-1)a, k \times 4-(k-1)b) = B'(3,12)$

$\therefore$ k – (k - 1) a = 3 . . . (iii) र 4k – (k -1) b = 12 . . . (iv)

समीकरण (i) **र** (iii) **हल गर्दा** k = 3

k **को मान समीकरण** (i) **मा राख्दा,** a = 0

पुनः k **को मान समीकरण** (ii) **मा राख्दा,** b = 0

$\therefore$ **विस्तारीकरणको केन्द्र** = (a, b) = (0, 0) **र विस्तारको नापो** k =3

वैकल्पिक तरिका

यहाँ, A(2, 3) $\rightarrow$A' (6, 9) = A' (3 x 2, 3 x 4)

B(1, 4) $\rightarrow$B' (3, 12) B' (3 x 1, 3 x 4)

$\therefore$ **विस्तारीकरणको केन्द्र** = (0, 0)

विस्तारको नापो = 3

यो तरिका विस्तारीकरणको केन्द्र उद्गम बिन्दु (0, 0) **हुँदा मात्र प्रयोग गर्न सकिन्छ।**

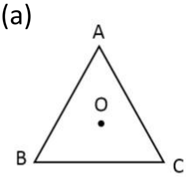
अभ्यास 7.4

1. (a) **विस्तारीकरणको परिभाषा दिनुहोस्।**

   (b) **आकृति र प्रतिबिम्ब कुन अवस्थामा विस्तारीकरणको केन्द्रको एउटै दिशामा पर्छन् र कुन अवस्थामा विपरीत दिशामा पर्छन्, लेख्नुहोस्।**

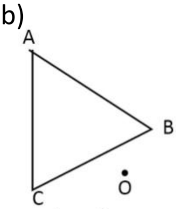
2. **तलका ज्यामितीय आकृतिहरूलाई विस्तारीकरणको केन्द्र** O **र दिइएको विस्तारको नापो** k **लिएर विस्तार गर्नुहोस्** :

(a)



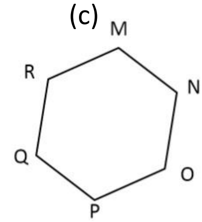
k = 2

(b)



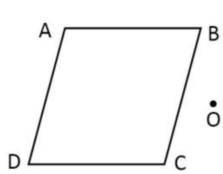
k = 1/2

(c)



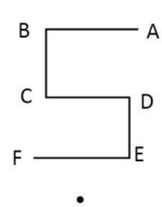
k = -2

(d)



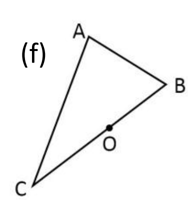
k = 3

(e)



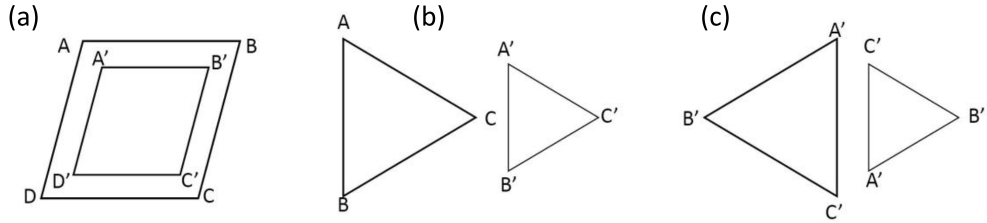
k = -3

(f)



k = -1

3. चित्रमा आकृति र तिनका प्रतिबिम्ब दिइएका छन् । प्रत्येकको विस्तारीकरणको केन्द्र र विस्तारको नापो पत्ता लगाउनुहोस् ।



4. विस्तारीकरण E ले तलका अवस्थाहरूमा बिन्दुहरू A(4, 5) B(3, 0), C(-2, 3), D (-5, 0) र E(-3, -2) को विस्तारित प्रतिबिम्बको निर्देशाङ्क पत्ता लगाउनुहोस् :

(a) E[O, 2] (b) E[O, -3] (c) E[O,$^3/_2$] (d) E[O, $-\frac{1}{3}$] (e)E[(3,-2),2]
(f) E[(1, 0),-4] (g) E[(-2,-2), $-^3/_2$]

5. ΔABC का शीर्षबिन्दुहरू A(4, -2), B(3, 1) र C(2, 5) छन् । ΔABC लाई विस्तारीकरण E[O,2] ले विस्तार गरी बन्ने प्रतिबिम्ब ΔA'B'C' को शीर्षबिन्दुहरूका निर्देशाङ्क पत्ता लगाउनुहोस् साथै आकृति र प्रतिबिम्बलाई लेखाचित्रमा देखाउनुहोस् ।

6. P(0, -1), Q(1, 3), R(2, 2) र S(1, -2) समानान्तर चतुर्भुज PQRS को शीर्षबिन्दुहरू हुन् । समानान्तर चतुर्भुज PQRS लाई विस्तारीकरण E[(1,3), -2] ले विस्तार गरी बन्ने प्रतिबिम्बको शीर्षबिन्दुहरूका निर्देशाङ्क लेख्नुहोस् । आकृति र प्रतिबिम्बलाई लेखाचित्रमा देखाउनुहोस् ।

7. एउटा विस्तारीकरणले बिन्दु A लाई A' र B लाई B' मा विस्तार गर्छ भने विस्तारीकरणको केन्द्र र नापो पत्ता लगाउनुहोस् ।

(a) A(3, 2) $\rightarrow$ A'(-6, -4)

B(-2, 4) $\rightarrow$ B' (4, - 8)

(b) A(3, -2) $\rightarrow$ A' (9, -6)

B(-1, 0) $\rightarrow$ B' (-3, 0)

(c) A(-4, 0) $\rightarrow$ A' (-10, -1)

B(4, 6) $\rightarrow$ B'(6, 11)

(d) A(2, 0) $\rightarrow$ A'(3, -2)

B(3, 4) $\rightarrow$ B' (5, 6)

8.(a) यदि विस्तारीकरण E[O, 3] ले बिन्दु A(a, 2) लाई A' (9, b) मा विस्तार गर्छ भने a र b को मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

(b) यदि विस्तारीकरण $E\left[(a,b),\frac{1}{2}\right]$ ले बिन्दु A(-1, 6) लाई A' (1, 2) मा विस्तार गर्छ भने a र b को मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

9. कुनै बिन्दु P(x, y) लाई विस्तरीकरण E[O, k_1] ले विस्तार गर्दा आउने प्रतिबिम्बलाई फेरि विस्तारीकरण E[0, k_2] ले विस्तार गर्दा आउने प्रतिबिम्ब र उक्त बिन्दु P(x, y) लाई विस्तारीकरण E[O,$k_1.k_2$] ले विस्तार गर्दा आउने प्रतिबिम्बसँग तुलना गर्नुहोस् । यसबाट के निष्कर्ष निस्कन्छ लेख्नुहोस् ।

10. विस्तारीकरणका गुणहरू के के हुन् ? दैनिक जीवनमा विस्तारीकरणको प्रयोग कहाँ कहाँ हुन्छ ? समूहमा छलफल गरी एक प्रतिवेदन तयार पारी कक्षामा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

एकाइ **8**

तथ्याङ्क शास्त्र (Statistics)

8.1 पुनरावलोकन (Review)

एउटा विद्यालयको कक्षा 9 मा अध्ययनरत 11 जना विद्यार्थीहरूको तौल (kg) मा निम्नअनुसार छ :

52, 53, 37, 40, 35, 51, 48, 45, 55, 46, 47

उक्त तथ्याङ्कका आधारमा निम्न प्रश्नहरूमा छलफल गर्नुहोस् :

(a) उक्त तथ्याङ्कलाई बढ्दो क्रम (ascending order) वा घट्दो क्रममा (descending order) मा कसरी प्रस्तुत गर्न सकिन्छ ?

(b) यसरी क्रम मिलाएर राख्दा बिचमा पर्ने मान कति हुन्छ ?

(c) उच्चतम र न्यूनतम मान बिच कति फरक छ ?

तथ्याङ्कलाई बढ्दो वा घट्दो क्रममा मिलाएर राख्दा ठिक बिचमा पर्ने मान मध्यिका हो । केन्द्रीय मान पत्ता लगाउने एउटा विधि मध्यिका हो । यसले तथ्याङ्कको वितरणलाई दुई बराबर खण्डमा विभाजन गर्दछ । सबैभन्दा ठुलो वा सबैभन्दा सानो अङ्कले मध्यिका माथि कुनै प्रभाव पार्दैन, किनकि मध्यिकाको मूल्य बिचका केही अङ्कहरूले मात्र निश्चित गर्दछ । विद्यार्थीलाई प्राप्ताङ्कका आधारमा क्रम निर्धारण (ranking) गरी मूल्याङ्कनमा न्यूनतम, मध्यम र उच्चतम स्थान प्रदान गर्नसमेत मध्यिकाको प्रयोग गरिन्छ । अब निम्न लिखित प्रश्नहरूमा थप छलफल गर्नुहोस् :

(a) तथ्याङ्क भनेको के हो ?

(b) बारम्बारता भनेको के हो ?

(c) सञ्चित बारम्बारताले के जनाउँछ ?

(d) अङ्क गणितीय मध्यक वा औसत भनेको के हो ?

(e) वैयक्तिक र खण्डित श्रेणी भनेको के हो ?

8.1 चतुर्थांशहरू (Quartiles)

वैयक्तिक र खण्डित श्रेणी

कक्षा 9 का 15 जना विद्यार्थीहरूको गणित विषयको एकाइ परीक्षाको प्राप्ताङ्क निम्नानुसार छ :

67, 70, 65, 75, 78, 93, 95, 82, 80, 92, 72, 84, 90, 87, 85

यो तथ्याङ्कलाई बढ्दो क्रममा एउटा रेखामा राख्दा निम्नअनुसार देखिन्छ :

65| 67| 70| 72| 75| 78| 80| 82| 84| 85| 87| 90| 92| 93| 95

यो रेखालाई दुई बराबर भागमा विभाजन गर्ने बिन्दु (सङ्ख्या) कुन हो ? छलफल गर्नुहोस् ।

यो श्रेणीलाई चार बराबर भागमा विभाजन गर्न कति ओटा बिन्दु (सङ्ख्या/अङ्क) लिनुपर्ला ? छलफल गर्नुहोस् ।

यहाँ तिन ओटा बिन्दु (सङ्ख्या/प्राप्ताङ्क) ले दिइएको श्रेणीलाई चार बराबर भागमा विभाजन गर्दछ । न्यूनतम मानबाट गणना गर्दा चौथो पद अर्थात 72, आठौँ पद अर्थात 82, र बारौँ पद अर्थात् 90 ले यो श्रेणीलाई चार बराबर भाग (अंश) मा विभाजन गर्छ । यसरी कुनै तथ्याङ्कलाई चार बराबर भाग (अंश) मा विभाजन गर्ने मानलाई चतुर्थांश भनिन्छ । यहाँ 72 लाई पहिलो चतुर्थांश (Q_1), वा तल्लो चतुर्थांश (lower quartile) 82 लाई दोस्रो चतुर्थांश (Q_2) वा मध्यिका र 90 लाई तेस्रो चतुर्थांश (Q_3) वा माथिल्लो चतुर्थाँश (upper quartile) भनिन्छ ।

अब, कुनै तथ्याङ्कको चतुर्थाँशीय मानहरू कसरी पत्ता लगाउन सकिन्छ ? छलफल गर्नुहोस् । माथिको तथ्याङ्कमा जम्मा 15 ओटा तथ्याङ्कहरू वा बिन्दुहरू छन् । यसको अवलोकनबाट वैयक्तिक र खण्डित श्रेणीमा

पहिलो चतुर्थांश (Q_1) =$\left(\frac{N+1}{4}\right)$ औँ पद, $Q_2 = 2\left(\frac{N+1}{4}\right)$औँ पद,

दोस्रो चतुर्थांश वा मध्यिका (Q_2) = $\left(\frac{N+1}{2}\right)$ औँ पद, र

तेस्रो चतुर्थांश (Q_3) = $3\left(\frac{N+1}{4}\right)$ औँ पद हुन्छ ।

उदाहरण 1

निम्न तथ्याङ्कका तिन ओटा चतुर्थांशहरू पत्ता लगाउनुहोस् :

18, 20, 15, 20, 18, 22, 24, 28, 12,18, 22, 24, 15, 20, 18, 20, 22, 15, 28

समाधान

दिइएको तथ्याङ्कलाई बढ्दो क्रम र बारम्बारता तालिकामा राख्दा,

मान	बारम्बारता	सञ्चित बारम्बारता
12	1	1
15	3	1 + 3 = 4
18	4	4 + 4 = 8
20	4	8 + 4 = 12
22	3	12 + 3 = 15
24	2	15 + 2 = 17
28	2	17 + 2 = 19
	N =19	

अब, सूत्रअनुसार,

पहिलो चतुर्थांश (Q_1) = $\left(\frac{N+1}{4}\right)$ औँ पद

= $\left(\frac{19+1}{4}\right)$ औँ पद

= 5 औँ पद = 18

(पाँचौँ पद, सञ्चित बारम्बारता 8 भएको स्थानमा पर्दछ ।)

दोस्रो चतुर्थांश (Q_2) = 2 $\left(\frac{N+1}{4}\right)$ औँ पद

= 2 $\left(\frac{19+1}{4}\right)$ औँ पद = 10 औँ पद = 20

(10 औँ पद, सञ्चित बारम्बारता 12 भएको स्थानमा पर्दछ ।)

र तेस्रो चतुर्थांश (Q_3) = 3$\left(\frac{N+1}{4}\right)$ औँ पद

= 3 $\left(\frac{19+1}{4}\right)$ औँ पद = 15 औँ पद = 22

(15 औँ पद, सञ्चित बारम्बारता 17 भएको स्थानमा पर्दछ ।)

8.2 दशांशकहरू (Deciles)

एउटा लामो डोरीलाई दस बराबर भागमा विभाजन गर्न कति ठाउँमा काट्नुपर्ला ? छलफल गर्नुहोस् ।

कक्षा 9 का 20 जना विद्यार्थीहरूको प्राप्ताङ्क निम्नानुसार छ :

40, 42, 45, 35, 70, 45, 55, 62, 65, 65, 33, 46, 70, 80, 75, 44, 49, 82, 90, 95

- यो तथ्याङ्कलाई बढ्दो वा घट्दो क्रममा मिलाएर लेख्नुहोस् ।
- यस तथ्याङ्कलाई दश बराबर भाग (अंश) मा विभाजन गर्ने मानहरू पत्ता लगाई छलफल गर्नुहोस् ।

यसरी कुनै तथ्याङ्कको वितरणलाई दश बराबर भाग (अंश) मा विभाजन गर्ने मानलाई दशांशक (Deciles) भनिन्छ । यिनीहरूलाई क्रमशः D_1, D_2, ... D_8, D_9 ले जनाइन्छ ।

वैयक्तिक र खण्डित श्रेणीमा दशांशक पर्ने स्थान निम्न सूत्र प्रयोग गरी पत्ता लगाउन सकिन्छ :

$D_n = n\left(\frac{N+1}{10}\right)$औँ पद

यहाँ, n = 1, 2,.........9

र N = जम्मा पद सङ्ख्या वा बारम्बारता

उदाहरण 2

तलको तथ्याङ्कको पहिलो, दोस्रो र सातौँ दशांशक मान पत्ता लगाउनुहोस् :

48, 50, 34, 29, 40, 36, 42, 55, 56, 38, 55, 52, 47, 45, 58, 62, 54, 57, 44

समाधान

दिइएको तथ्याङ्कलाई बढ्दो क्रममा राख्दा,

29, 34, 36, 38,40, 42, 44, 45, 47,48, 50, 52, 54, 55, 55, 56, 57, 58, 62

अब, पहिलो दशांशक (D_1) **पर्ने स्थान** $\frac{N+1}{10} = \frac{19+1}{10}$

= दोस्रो पद

अत: पहिलो दशांशकको मान (D_1) = 34

दोस्रो दशांशक (D_2) **पर्ने स्थान** $= \frac{n(N+1)}{10}$

$= \frac{2\times(19+1)}{10} = 4$ **औँ पद**

= **चौँथो पद**

अत: दोस्रो दशांशकको मान (D_2) = 38

यसैगरी सातौँ दशांशक (D_7) **पर्ने स्थान** $= \frac{n(N+1)}{10} = \frac{7(19+1)}{2} = \frac{7\times 20}{10} = 14$ **औँ पद**

अत: सातौँ दशांशीय मान (D_7) = 55

उदाहरण 3

तलको तथ्याङ्कबाट तेस्रो र आठौँ दशांशक मान पत्ता लगाउनुहोस् :

प्राप्ताङ्क	15	25	35	45	55	65	75
विद्यार्थी सङ्ख्या	4	7	9	5	6	4	5

समाधान

उपर्युक्त तथ्याङ्कलाई सञ्चित बारम्बारता तालिकामा प्रस्तुत गर्दा,

प्राप्ताङ्क (x)	विद्यार्थी सङ्ख्या (f)	सञ्चित बारम्बारता (c.f)
15	4	4
25	7	4 + 7 = 11
35	9	11 + 9 = 20
45	5	20 + 5 = 25
55	6	25 + 6 = 31
65	4	31 + 4 = 35
75	5	35 + 5 = 40
	N = 40	

अब, तेस्रो दशांशीय मान (D_3) = $\frac{n(N+1)}{10}$

$= \frac{3(40+1)}{10} = 12.3$ औँ पद

= 35

फेरि,

आठौँ दशांशीय मान

$D_8 = \frac{n(N+1)}{10} = \frac{8\times(40+1)}{10} = 32.8$ औँ पद = 65

8.3 शतांशक (Percentile)

एक मिटर लामो लट्ठीलाई 100 ओटा बराबर भागमा हुने गरी काट्न कति ठाउँमा काट्नुपर्ला ? ती प्रत्येक भागको लम्बाइ कति होला ? छलफल गर्नुहोस् ।

25 जना विद्यार्थीहरूको उचाइ (cm) मा निम्नअनुसार छ :

125, 123, 128, 144, 137, 146, 135, 143, 149, 152, 155, 150, 141, 131, 134, 149, 153, 122, 120, 119, 115, 127, 136, 142, 140

उपर्युक्त तथ्याङ्कलाई बढ्दो क्रममा लेख्नुहोस् । यसै तथ्याङ्कलाई सय बराबर भाग वा अङ्शमा विभाजन गर्ने मानहरू पत्ता लगाई छलफल गर्नुहोस् ।

कुनै पनि तथ्याङ्कलाई सय बराबर खण्डमा विभाजन गर्ने 99 ओटा बिन्दुहरूलाई शतांशक (percentile) मान भनिन्छ । यी मानहरूलाई क्रमश: $P_1, P_2, P_3, \ldots\ldots P_{99}$ ले सङ्केत गरिन्छ ।

चतुर्थांश र दशांशक जस्तै शतांशक मान पत्ता लगाउने सूत्र निम्नअनुसार छ :

वैयक्तिक तथा खण्डित श्रेणीका लागि n औँ शतांशक मान पर्ने स्थान $P_n = n\frac{(N+1)}{100}$ औँ पद

उदाहरण 4

तलको तथ्याङ्कबाट पाँचौं र बयासिऔं (82 औँ) शतांशक मान पत्ता लगाउनुहोस् :

32, 33, 55, 47, 20, 50, 25, 12, 66, 68, 49, 17, 43, 40, 19, 54, 22, 29, 18

समाधान

दिइएको तथ्याङ्कलाई सानोदेखि ठुलो क्रममा मिलाएर राख्दा,

12, 17,18, 19, 20, 22, 25, 29, 32, 33, 40, 43, 47, 49, 50, 54, 55, 66, 68

अब

पाँचौं शतांशक मान $P_n = \frac{n(N+1)}{100}$ औँ पद

$P_5 = \frac{5\times20}{100}$ औँ पद

$= \frac{100}{100}$ औँ पद

= 1 औँ पद = पहिलो पद

अत: पाँचौं शतांशक मान $P_5 = 12$

पुन: 82 औँ शतांशक मान

$P_n = n\,(\frac{N+1}{100})$ औँ पद

$= P_{82} = \frac{82\times20}{100}$ औँ पद

$= \frac{1640}{100}$ औँ पद

= 16.4 औँ पद

अर्थात, $P_{82,}$ 16 औँ पद र 17 औँ पदको बिचमा पर्छ

अत : P_{82} $\frac{54+55}{2} = \frac{109}{2} = 54.5$

उदाहरण 5

तलका तथ्याङ्कबाट दसौँ शतांशक मान पत्ता लगाउनुहोस् :

मान	5	15	25	35	45	55	65
बारम्बारता	4	6	10	20	10	6	4

समाधान

उपर्युक्त तथ्याङ्कलाई सञ्चित बारम्बारता तालिकामा प्रस्तुत गर्दा,

मान (x)	बारम्बारता (f)	सञ्चित बारम्बारता
5	4	4
15	6	4 + 6 = 10
25	10	10 + 10 = 20
35	20	20 + 20 = 40
45	10	40 + 10 = 50
55	6	50 + 6 = 56
65	4	56 + 4 + 60
	N = 60	

अब दसौँ शतांशीय मान

$P_n = n\left(\frac{N+1}{100}\right)$ औँ पद

$P_{10} = \frac{10(60+1)}{100}$ औँ पद $= \frac{610}{100}$ औँ पद

= 6.1 औँ पद = 15

यहाँ, P_{10} को मान 6.1 औँ पद भएको स्थानमा अर्थात् सञ्चित बारम्बारता 10 भएको सम्बन्धित पद 15 हुन्छ ।

अभ्यास 8.1

1. (a) वैयक्तिक र खण्डित श्रेणी भनेको के हो ? उदाहरणसहित स्पष्ट पार्नुहोस् ।
   (b) चतुर्थांशीय मान भन्नाले के बुझिन्छ ? Q_1 पत्ता लगाउने सूत्र लेख्नुहोस् ।
   (c) दशांशीय मान भनेको के हो ? यिनीहरूलाई केले जनाइन्छ, लेख्नुहोस् ।
   (d) शतांशक मान भनेको के हो ? यिनीहरूलाई केले जनाइन्छ, लेख्नुहोस् ।
   (e) वैयक्तिक र खण्डित श्रेणीको दशांशक र शतांशक मान पत्ता लगाउने सूत्रहरू लेख्नुहोस् ।
2. तलको तथ्याङ्कबाट Q_1, Q_2 र Q_3 पत्ता लगाउनुहोस् :
   (a) 9, 3, 5, 9, 12, 10, 3, 5, 12, 10, 15, 9, 7, 15, 10, 16, 20, 9, 20, 4, 3, 5, 9
   (b) 15, 20, 22, 15, 20, 12, 22, 15, 25, 20, 26, 25, 26, 25, 15

3. (a) निम्न लिखित तथ्याङ्कका आधारमा पहिलो र तेस्रो चतुर्थांशहरूको मान पत्ता लगाउनुहोस् :

प्राप्ताङ्क	25	35	45	55	65	75
विद्यार्थी सङ्ख्या	5	15	10	8	6	2

(b) निम्न लिखित तथ्याङ्कका आधारमा दोस्रो र तेस्रो चतुर्थांशहरूको मान पत्ता लगाउनुहोस् :

प्राप्ताङ्क	5	15	25	35	45	55
विद्यार्थी सङ्ख्या	3	7	15	5	8	2

4. (a) तलको तथ्याङ्कका पहिलो, चौथो र आठौँ दशांशक मान पत्ता लगाउनुहोस् :

20, 22, 29, 28, 10, 20, 25, 35, 40, 42, 47, 51, 55, 57, 52, 26, 19, 33, 60

(b) तलको तथ्याङ्कका आधारमा दोस्रो र सातौँ दशांशक मान पत्ता लगाउनुहोस् :

48, 50, 34, 29, 56, 40, 14, 62, 28, 70, 22, 30, 74, 13, 47, 20, 53, 63, 68, 65, 25, 19, 70, 73, 79, 74, 27, 33, 18

(c) तलको तथ्याङ्कबाट पाँचौँ र छैटौँ दशांशीय मान पत्ता लगाउनुहोस् :

वर्षा (mm)	35	45	55	65	75	85
दिन	7	3	10	5	3	2

(d) 30 पूर्णाङ्कको एउटा परीक्षामा विद्यार्थीहरूको प्राप्ताङ्क निम्नअनुसार छ :

प्राप्ताङ्क	5	10	15	20	25	30
विद्यार्थी सङ्ख्या	3	7	6	2	5	7

माथिको तालिकाबाट चौथो र नवौँ दशांशीय मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

5. (a) तलको तथ्याङ्कबाट चालिसौँ र नब्बेऔँ शतांशक मान पत्ता लगाउनुहोस् :

3, 5, 7, 9, 17, 11, 13, 23, 33, 37, 29, 41, 47, 43, 51, 57, 93, 63, 59, 83

(b) तलको तथ्याङ्कबाट बत्तिसौँ र पचासौँ शतांशक मान पत्ता लगाउनुहोस् :

उचाइ (cm)	10	15	20	25	30	35	40
बिरुवाको सङ्ख्या	10	6	15	8	4	5	3

8.4 विचरणशीलता (Dispersion)

कक्षा 9 का दुई ओटा समूहका 11/11 जनाको एउटा परीक्षाको प्राप्ताङ्क निम्नअनुसार छ :

समूह 'क' 40, 43, 45, 50, 52, 55, 58, 60, 65, 67, 70

समूह 'ख' 10, 15, 32, 44, 48, 55, 62, 66, 78, 95, 100

उपर्युक्त तथ्याङ्क अध्ययन गरी निम्न प्रश्नहरूमा छलफल गर्नुहोस् :

(a) समूह 'क' र 'ख' को मध्यक र मधियका कति कति छ ?

(b) यी दुवै समूहमध्ये कुन समूहका विद्यार्थीको प्राप्ताङ्क राम्रो छ र किन ?

(c) के मध्यक र मधियकाले मात्रै कुनै तथ्याङ्कका सबै गुणको प्रतिनिधित्व गर्न सक्छ ?

(d) समूह 'क' र 'ख' को प्राप्ताङ्क बिच तुलना गर्न के कस्ता चरको प्रयोग गर्न सकिन्छ ?

सामान्यतया विभिन्न तथ्याङ्कको गुणको व्याख्या गर्न केन्द्रीय प्रवृत्तिको मापन अर्थात मध्यक र मधियकाको प्रयोग गरिन्छ । तर यिनीहरूले तथ्याङ्कहरू मध्यबिन्दुबाट कसरी विचलित भएका छन् भन्ने कुराको जानकारी दिदैनन् । कुनै तथ्याङ्कको मध्यबिन्दुको सापेक्षमा फैलावट वा विचलनको मापनलाई विचरणशीलता भनिन्छ । कुनै पनि चर वा तथ्याङ्क औसत वा मध्यबिन्दुबाट कति परिमाणमा छरिएको, फैलिएको वा विचलित भएको वा तल वा माथि छ भन्ने कुराको मापन नै विचरणशीलताको मापन हो । विचरणशीलता मापनको मुख्य उद्देश्य कुनै तथ्याङ्कहरू बिचको सजातीयता (homogenity) अथवा विविधता (heterogenity) पत्ता लगाउनु हो ।

सामान्यतया विचरणशीलताको मापन गर्न विस्तार वा प्रसार (range), चतुर्थांशीय विचलन (quartile deviation), मध्यक भिन्नता (mean deviation), स्तरीय भिन्नता (standard deviation), आदि र यिनका गुणाङ्कहरू (cofficients) को गणना गर्न सकिन्छ ।

(क) चतुर्थांशीय विचलन (Quartile Deviation)

तल दिइएको तथ्याङ्कको चतुर्थांशीय मानहरू पत्ता लगाउनुहोस् । यी मानहरूले के के जनाउँछन् ? छलफल गर्नुहोस् ।

11, 32, 31, 33, 55, 27, 47, 50, 65, 48, 40, 15, 45, 49, 60

यो तथ्याङ्कलाई बढ्दो क्रममा राख्दा,

11, 15, 21, 27, 32, 33, 40, 45, 47, 48, 49, 50, 55, 60, 65

यो एउटा वैयक्तिक श्रेणी हो र यसमा जम्मा पद सङ्ख्या 15 छ । यसमा तिन चतुर्थांशीय मानहरू क्रमश :

$Q_1 = \left(\frac{N+1}{4}\right)$ औँ पद $= \left(\frac{15+1}{4}\right)$ औँ पद $= 4$ औँ पद $= 27$

$Q_2 = 2\left(\frac{N+1}{4}\right)$ औँ पद $= 8$ औँ पद $= 45$

$Q_3 = 3\left(\frac{N+1}{4}\right)$ औँ पद $= 12$ औँ पद $= 50$

यी चतुर्थांशहरू बिचको औसत र सापेक्षित अन्तर कति कति होला ? गणना गर्नुहोस् । यसरी माथिल्लो र तल्लो चतुर्थांशमा आधारित विचरणको मापनलाई चतुर्थांशीय विचलन (quaerile deviation) भनिन्छ । माथिल्लो र तल्लो चतुर्थांशहरूको फरकलाई “inter quqrtile range" भनिन्छ । यी दुई चतुर्थांशीय मानबिचको फरकका आधालाई semi interquartile range अथवा चतुर्थांशीय विचलन भनिन्छ ।

अर्थात, चतुर्थांशीय विचलन (Q.D) = $\frac{Q_3-Q_1}{2}$

यहाँ Q_3 = माथिल्लो (तेस्रो) चतुर्थांश

Q_1 = तल्लो (पहिलो) चतुर्थांश

माथिको तथ्याङ्कका लागि, Q.D. = $\frac{Q_3-Q_1}{2}$ = $\frac{50-27}{2}$ = $\frac{23}{2}$ = 11.5

पुन: माथिल्लो र तल्लो चतुर्थांशको सापेक्षिक फरकको मापनलाई चतुर्थांशीय विचलनको गुणाङ्क भनिन्छ । यसलाई सूत्रमा निम्नअनुसार लेख्न सकिन्छ :

चतुर्थांशीय विचलनको गुणाङ्क (Cofficient of Quartile Deviation)

$= \frac{Q_3-Q_1}{Q_3+Q_1} = \frac{50-27}{50+27} = \frac{23}{7}$ =0.29 =29%

उदाहरण 1

तलको तथ्याङ्कका चतुर्थांशीय विचलन वा भिन्नता र त्यसका गुणाङ्क पत्ता लगाउनुहोस् :

आम्दानी (रु. हजारमा)	25	27	30	32	37	50
परिवार सङ्ख्या	3	4	7	6	2	1

समाधान

दिइएको तथ्याङ्कलाई सञ्चित बारम्बारता तालिकामा राख्दा

आम्दानी (रु. हजारमा) (x)	परिवार सङ्ख्या (f)	सञ्चित बारम्बारता
25	3	3
27	4	3+4 =7
30	7	7+7 = 14
32	6	14+6 =20
37	2	20 +2=22
50	1	22+1 = 23
	N =23	

अब, पहिलो चतुर्थांश (Q_1) = $\frac{N+1}{4}$ औँ पदको मान

$= \frac{23+1}{4}$ औँ पदको मान

$= \frac{24}{4}$ औँ पदको मान

= 6 औँ पदको मान

= रु. 27 हजार

तेस्रो चतुर्थांश (Q_3) = $\frac{3}{4}$ (N +1) औँ पदको मान

= $\frac{3}{4} \times 24$ औँ पदको मान

= 18 औँ पदको मान = रु. 32 हजार

$\therefore$ चतुर्थांशीय भिन्नता (Q.D) = $\frac{Q_3-Q_1}{2} = \frac{32-27}{2} = \frac{5}{2}$ = रु. 2.5 हजार

चतुर्थांशीय भिन्नताको गुणाङ्क = $\frac{Q_3-Q_1}{Q_3+Q_1} = \frac{32-27}{32+27} = \frac{5}{59} = 0.084$

(ख) मध्यक भिन्नता **(Mean Deviation)**

कुनै दुई ओटा पर्यटकीय स्थलहरू 'क' र 'ख' को कुनै दिनको विभिन्न समयको तापक्रम (°C) मा निम्नअनुसार छ :

स्थान 'क' 0, 3, 7, 10, 13, 17, 20, 23, 27, 30

स्थान 'ख' 10, 11, 12, 14, 15, 15, 16,18, 19, 20

उपर्युक्त तथ्याङ्कको अध्ययन गरी निम्न प्रश्नहरूमा छलफल गर्नुहोस् :

(a) स्थानहरू 'क' र 'ख' मध्ये मौसमका आधारमा पर्यटकहरूले कुन स्थान बढी मन पराउँछन् होला, किन ?

(b) यी दुवै स्थानको औसत तापक्रम कति कति छ ?

(c) यी दुवै तथ्याङ्कको तुलना गर्ने आधारहरू के के हुन सक्छन् ?

(d) यिनीहरूमा मध्यमानबाट औसतमा कुन श्रेणीमा पदहरू बढी टाढा छन् ?

यहाँ दुवै पर्यटकीय स्थानहरूको औसत तापक्रम बराबर भए पनि स्थान 'क' को तापक्रम औसतभन्दा धेरै तलमाथि भएको देखिन्छ भने स्थान 'ख' को तापक्रम तुलनात्मक रूपमा बढी स्थिर रहेको देखिन्छ । यसरी औसत (मध्यक वा मध्यिका) का आधारमा तथ्याङ्कबिच तुलना गर्न मध्यक वा औसत विचलन प्रयोग गरिन्छ ।

मध्यक र मध्यिका जस्ता केन्द्रीय प्रवृतिका नापहरूबाट प्रत्येक पदको अन्तरको निरपेक्ष मानको औसतलाई मध्यक वा औसत भिन्नता भनिन्छ । मध्यक भिन्नता गणना गर्दा अङ्क गणितीय मध्यक वा मध्यिकाका आधारमा गरी दुई तरिका प्रयोग गरिन्छ ।

(अ) वैयक्तिक श्रेणी (**Individual series**) को मध्यक भिन्नता

यदि $x_1, x_2, x_3 \dots x_N$ एउटा वैयक्तिक श्रेणी हो, भने, यसको मध्यक भिन्नता

(M.D) = $\frac{\sum|D|}{N}$ हुन्छ ।

जहाँ $|D| = |x - A|$ प्रत्येक पदको औसतसँगको अन्तरको निरपेक्ष मान

A = श्रेणीको औसत, मध्यक वा मध्यिका

N = जम्मा पद सङ्ख्या

पुनः (a) मध्यक भिन्नता (मध्यक बाट) (M.D.) = $\frac{\sum|X-\bar{X}|}{N}$

जहाँ $\bar{x}$ = श्रेणीको अङ्क गणितीय मध्यक हो ।

(b) मध्यक भिन्नता (मध्यिका बाट) (M.D.) = $\frac{\sum|X-M_d|}{N}$

जहाँ M_d = श्रेणीको मध्यिका मान हो ।

मध्यक भिन्नता विचरणशीलता मापनको निरपेक्ष मान हो । फरक एकाइ तथ्याङ्कका दुई वा दुईभन्दा बढी श्रेणीहरूको तुलना गर्न मध्यक भिन्नताको गुणाङ्क (coefficient of mean deviation) को प्रयोग गरिन्छ । मध्यक भिन्नतामा आधारित विचरणशीलताको तुलनात्मक मापन नै मध्यक भिन्नताको गुणाङ्क हो । यसको गणनामा निम्न सूत्र प्रयोग गरिन्छ :

(a) मध्यक भिन्नताको गुणाङ्क (मध्यकबाट) = $\frac{\text{मध्यकबाट मध्यक भिन्नता}}{\text{मध्यक}}$

(b) मध्यक भिन्नताको गुणाङ्क (मध्यिकाबाट) = $\frac{\text{मध्यिकाबाट मध्यक भिन्नता}}{\text{मध्यिका}}$

उदाहरण 2

निम्न लिखित तथ्याङ्कको मध्यक भिन्नता र यसको गुणाङ्क पत्ता लगाउनुहोस् :

(क) मध्यकबाट (ख) मध्यिकाबाट

प्रतिघण्टा ज्याला (रु. मा) 90, 100, 110, 115, 125

समाधान

(क)दिइएका तथ्याङ्कबाट मध्यक भिन्नता (मध्यकबाट) पत्ता लगाउन निम्नअनुसारको तालिका प्रयोग गरिन्छ :

ज्याला प्रतिघण्टा (रु.) (x)	$D = x - \bar{x}$	|D|
90	-18	18
100	-8	8
110	2	2
115	7	7
125	17	17
$\Sigma x = 540$		Σ |D| = 52

N = 5

अब, मध्यक (X)= $\frac{\sum x}{N} = \frac{540}{5} = 108$

अतः मध्यक भिन्नता (मध्यकबाट) (M.D.) = $\frac{\Sigma|D|}{N} = \frac{52}{5} = 10.4$

पुनः मध्यक भिन्नताको गुणाङ्क (मध्यकबाट) = $\frac{\text{मध्यक भिन्नता (मध्यिकाबाट)}}{\text{मध्यक}}$

$= \frac{10.4}{108} = 0.096$

(ख) मध्यिकाबाट मध्यक औसत भिन्नता पत्ता लगाउन पहिला मध्यिका पत्ता लगाउनुपर्छ ।

यहाँ, मध्यिका (M_d) = $\left(\frac{N+1}{2}\right)$ औँ पदको मान

$= \left(\frac{5+1}{2}\right)$ औँ पदको मान

= 3^{rd} पदको मान = 110

फेरि,

ज्याला प्रतिघण्टा (रु.) (x)	$D = X - M_d$	|D|
90	-20	20
100	-10	10
110	0	0
115	5	5
125	15	15
		Σ|D| = 50

अत: मध्यक भिन्नता (मध्यिकाबाट) (M.D) = = $\frac{\Sigma|D|}{M_d}$

$$= \frac{50}{5} = 10$$

फेरि, मध्यक भिन्नताको गुणाङ्क (मध्यिका बाट) = $\frac{\text{मध्यक भिन्नता (मध्यिकाबाट)}}{\text{मध्यिका}}$

$$= \frac{10}{120} = \frac{1}{11} = 0.0909$$

मध्यक र मध्यिका मध्ये कुन औसतबाट निकालिएको मध्यक वा औसत भिन्नता बढी उपयोगी हुन्छ, किन ? छलफल गरी निष्कर्ष पत्ता लगाउनुहोस् ।

(आ) **खण्डित श्रेणी (Discrete series) को मध्यक भिन्नता**

मानौँ, x_1, x_2, x_3, …… x_n एउटा खण्डित श्रेणी हो जसका सम्बन्धित पदहरूको बारम्बारता क्रमश: $f_1, f_2, f_3, \ldots. f_n$ छ ।

अर्थात, श्रेणीको मान (x) = $x_1, x_2, x_3, \ldots. x_n$

र बारम्बारता (f) = $f_1, f_2, f_3, \ldots. f$n भए,

मध्यक भिन्नता (M.D) = $\frac{\sum f|D|}{\sum f}$ हुन्छ ।

जहाँ, D = x -A, सम्बन्धित पद र औसत मानको अन्तर

f = सम्बन्धित पदको बारम्बारता

A = दिइएको श्रेणीको औसत मान, मध्यक वा मध्यिका

$\Sigma f|D|$ = प्रत्येक पद र औसत अन्तरको निरपेक्ष मान र सम्बन्धित बारम्बारताको गुणनफलको योगफल

Σf = बारम्बारताको योगफल वा जम्मा पद सङ्ख्या

(a) मध्यक भिन्नता (मध्यकबाट) (M.D) = $\frac{\sum f|x-\bar{x}|}{N}$

जहाँ, $\bar{x}$ = श्रेणीको मध्यक

(b) मध्यक भिन्नता (मध्यिकाबाट) (M.D) = $\frac{\sum f|x-M_d|}{N}$

जहाँ, M_d = श्रेणीको मध्यिका

उदाहरण 3

एउटा बगैँचामा रोपिएको 100 ओटा बिरुवाको उचाइ रोपेको 1 वर्षपछि निम्नअनुसार छ :

उचाइ (cm)	6	8	10	12	14	16	18	20
सङ्ख्या	1	14	25	27	18	9	4	2

यिनीहरू बिचको (क) मध्यक र (ख) मध्यिकाबाट मध्यक (औसत) भिन्नता (M.D) र तिनको गुणाङ्क पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान

दिइएको तथ्याङ्कको मध्यक र मध्यिका पत्ता लगाउन निम्न तालिका आवश्यक पर्छ :

बिरुवाको उचाइ (cm) (x)	बिरुवाको सङ्ख्या बारम्बारता (f)	सञ्चित बारम्बारता (c.f.)	fx
6	1	1	6
8	14	15	112
10	25	40	250
12	27	67	324
14	18	85	252
16	9	94	144
18	4	98	72
20	2	100	40
	N = 100	Σf = 100	Σfx= 1200

अब, मध्यक $\bar{x} = \frac{\sum fx}{\text{N}} = \frac{1200}{100}$ = 12cm

पुन : मध्यिका (M$_d$) $= \left(\frac{\text{N}+1}{2}\right)$ औँ पदको मान

$= \left(\frac{101}{2}\right)$ औँ पदको मान

= 50.5 औँ पदको मान

= 12 cm

यहाँ मध्यक $\bar{x}$ = मध्यिका (M$_d$) भएकाले मध्यक भिन्नता र यसको गुणाङ्क दुवै औसतबाट एउटै प्राप्त हुन्छ ।

अब,

उचाइ (x)	सङ्ख्या (f)	D = x-A	|D|	f|D|
6	1	-6	6	6
8	14	-4	4	56
10	25	-2	2	50
12	27	0	0	0
14	18	2	2	36
16	9	4	4	36
18	4	6	6	24
20	2	8	8	16
	N = 100			$\Sigma f\|D\| = 224$

अत: मध्यक भिन्नता (M.D) = $\frac{\sum f|D|}{\sum f}$ = $\frac{224}{100}$ = 2.24

पुन : मध्यक भिन्नताको गुणाङ्क = $\frac{M.D}{\bar{x}} = \frac{2.24}{12}$ =0.187

अभ्यास 8.2

1. (a) विचरणशीलता भनेको के हो ? उदाहरणसहित प्रस्ट पार्नुहोस् ।
   (b) चतुर्थांशीय विचलनलाई परिभाषित गर्नुहोस् ।
   (c) चतुर्थांशीय विचलनको गुणाङ्क पत्ता लगाउने सूत्र लेख्नुहोस् ।
   (d) मध्यक वा औसत भिन्नता भन्नाले के बुझिन्छ ? यसको महत्त्व प्रस्ट पार्नुहोस् ।
   (e) मध्यक वा औसत भिन्नताको गुणाङ्कलाई परिभाषित गर्नुहोस् ।
2. तलका तथ्याङ्कको चतुर्थांशीय भिन्नता र त्यसको गुणाङ्क पत्ता लगाउनुहोस् :
   (a) मूल्य (रु.) 12, 15, 10, 14, 20, 16, 18
   (b) उचाइ (cm) 24, 31, 45, 27, 56, 48, 37
   (c) खाजा खर्च (रु.) 140, 123, 132, 130, 112, 118, 138, 135
   (d) वर्षा (mm) 8, 13, 6, 27, 13, 14, 19
   (e) तौल (kg) 6, 3, 4, 10, 2,7, 5, 12, 9, 11, 8
3. तलका तथ्याङ्कको चतुर्थांशीय भिन्नता र त्यसको गुणाङ्क पत्ता लगाउनुहोस् ।

(a)

प्राप्ताङ्क	3	5	7	9	11	13	15	17	19
विद्यार्थी सङ्ख्या	2	10	12	15	20	13	12	10	4

(b)

वर्षा (mm)	40	45	50	55	60	64
ठाउँहरू	3	6	9	5	4	2

(c)

तौल (kg)	40	45	50	55	60	65
विद्यार्थी सङ्ख्या	2	5	6	4	3	3

(d)

मूल्य (रु.)	50	60	75	82	90	91
पसल सङ्ख्या	10	12	8	5	3	1

(e)

बिरुवाको उचाइ (cm)	10	12	14	16	18
सङ्ख्या	6	10	16	23	5

4. (a) कुनै तथ्याङ्कको तल्लो र माथिल्लो चतुर्थांशीय मान क्रमशः 45 र 55 भए सो श्रेणीको चतुर्थांशीय भिन्नता (Q.D.) र त्यसको गुणाङ्क पत्ता लगाउनुहोस् ।

(b) कुनै श्रेणीको पहिलो चतुर्थांशीय मान र चतुर्थांशीय विचलन क्रमश : 35 र 20 भए त्यसको तेस्रो चतुर्थांश (Q_3) र चतुर्थांशीय विचलनको गुणाङ्क पत्ता लगाउनुहोस् ।

(c) कुनै श्रेणीको चतुर्थांशीय विचलन र यसको गुणाङ्क क्रमश : 14 र $\frac{7}{22}$ भए, यसको पहिलो चतुर्थांश (Q_1) को मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

(d) कुनै श्रेणीको चतुर्थांशीय विचलनको गुणाङ्क 0.25 र यसको माथिल्लो चतुर्थांशीय मान 15 भए त्यसको तल्लो चतुर्थांशीय मान र चतुर्थांशीय विचलन पत्ता लगाउनुहोस् ।

(e) कुनै श्रेणीको पहिलो चतुर्थांशीय मान x र चतुर्थांशीय विचलन (x) भए त्यसको तेस्रो चतुर्थांशीय मान तथा चतुर्थांशीय विचलनको गुणाङ्क पत्ता लगाउनुहोस् ।

5. तलका श्रेणीको मध्यक तथा मध्यिकाबाट मध्यक वा औसत विचलन (M.D.) र त्यसको गुणाङ्क पत्ता लगाउनुहोस् :

(a) तापक्रम (°C) 10, 13, 12, 18, 22, 25, 30, 27, 40, 21, 13

(b) वर्षा (mm) 14, 10, 8, 12, 22, 28, 16, 24, 26

(c) उचाइ (inch) 24, 28, 29, 23, 36, 35, 25

(d) मासिक आम्दानी (रु. हजारमा) 41, 25, 30, 18, 20, 26, 45, 32, 35, 31, 27

(e) प्राप्ताङ्क 17, 10, 15, 7, 13, 9, 6, 18, 11, 14

6. दिइएका तथ्याङ्कका आधारमा मध्यक भिन्नता वा औसत विचलन (M.D.) र यसको गुणाङ्क पत्ता लगाउनुहोस् :

(क) मध्यकबाट (ख) मध्यिकबाट

(a) उचाइ (cm) 20, 18, 15, 20, 22, 18, 28, 24, 13, 18, 22, 24, 15, 20, 18, 20, 28, 15, 22

(b)

वर्षा (mm)	20	25	30	35	40
दिन	5	8	12	10	5

(c)

मान (x)	1	2	3	4	5
पटक (f)	2	5	6	5	2

(d)

तौल (kg)	35	60	50	45	55	70	75	65
विद्यार्थी सङ्ख्या	8	6	5	4	5	7	7	6

(e)

x	3	5	7	9	11	13
f	6	8	15	3	8	4

8.5 स्तरीय भिन्नता (Standard Deviation)

निम्न लिखित प्रश्नहरूमा छलफल गर्नुहोस् :

(a) मध्यक भिन्नता वा औसत विचलन गणना गर्न $D = x - A$ को निरपेक्ष मान लिनुपर्छ र निरपेक्ष मान नलिँदा के हुन्छ ?

(b) सो गणनामा $\Sigma|D|$ वा $\Sigma f|D|$ को सट्टा ΣD वा ΣfD गणना गर्दा के हुन्छ ?

(c) कुनै ऋणात्मक सङ्ख्याको वर्ग गर्दा कस्तो सङ्ख्या बन्छ ?

(d) कुनै वर्ग सङ्ख्याको धनात्मक वर्गमूल मात्र लिँदा के हुन्छ ?

(e) औसत विचलनका सबल र दुर्बल पक्षहरू के के हुन् ?

कुनै श्रेणी वा तथ्याङ्कहरूको वितरणमा त्यसका प्रत्येक पद र मध्यमान विचलनको वर्गको औसतको वर्गमूललाई स्तरीय भिन्नता (standard deviation) भनिन्छ । अर्को

शब्दमा कुनै पनि तथ्याङ्कहरूको मध्यमानबाट प्रत्येक पदको विचलनलाई वर्ग गरी तिनीहरूको योगफललाई जम्मा पद सङ्ख्याले भाग गरी वर्गमूल निकालेर स्तरीय भिन्नता गणना

गरिन्छ । त्यसैले यसलाई मध्यक भिन्नताको वर्गको औसतको वर्गमूल (root mean square deviation) पनि भन्ने गरिन्छ । यसलाई ग्रीक अक्षर सिग्मा (σ) ले जनाइन्छ ।

स्तरीय भिन्नताले कुनै पनि तथ्याङ्कको वितरणमा तथ्याङ्कको निरपेक्ष विस्तार अथवा विचरणशीलताको मापन गर्दछ । यसले तथ्याङ्कको वितरणको एकरूपताको मात्र निर्धारण गर्दछ । स्तरीय भिन्नताको मान जति सानो भयो त्यति नै तथ्याङ्कहरूमा एकरूपताको मात्रा बढी हुन्छ । त्यसैले यसको गणनाबाट कुनै तथ्याङ्कको वितरणमा मध्यकले कसरी सो तथ्याङ्कको प्रतिनिधित्व गरेको छ भन्ने जानकारी दिन्छ । यसबाट कुनै परिकल्पना, परीक्षण वा घटनाको औचित्यताको आँकलन गरिन्छ ।

(क) **वैयक्तिक श्रेणी (individual series) को स्तरीय भिन्नता**

यदि $x_1, x_2, x_3, \ldots\ x_N$ एउटा वैयक्तिक श्रेणी भए यसको प्रमाणिक विचलन वा स्तरीय भिन्नताको गणना निम्न सूत्रहरू प्रयोग गरी गर्न सकिन्छ :

(a) अप्रत्यक्ष विधि स्तरीय भिन्नता (S.D) वा $(\sigma) = \sqrt{\frac{\sum(x-\bar{x})^2}{N}} = \sqrt{\frac{\sum d^2}{N}}$

(b) प्रत्यक्ष विधि स्तरीय भिन्नता $(\sigma) = \sqrt{\frac{\sum d^2}{N} - \left(\frac{\sum d}{N}\right)^2}$

वा स्तरीय भिन्नता (S.D. वा σ) $= \sqrt{\frac{\sum x^2}{N} - \left(\frac{\sum x}{N}\right)^2}$

यहाँ, $d = X - \bar{X} = X - A$ श्रेणीको प्रत्येक पद र मध्यक वा औसत बिचको फरक

A = मध्यक वा काल्पनिक मध्यक

N = जम्मा पद सङ्ख्या

X = कुनै पदको मान

$\bar{X}$ = मध्यक

दुई वा दुईभन्दा बढी तथ्याङ्कहरू बिच एकरूपता वा विविधताको तुलनात्मक अध्ययन गर्न स्तरीय भिन्नताको गुणाङ्क (coefficient of standard deviation) गणना गरिन्छ । यसका लागि निम्न सूत्र प्रयोग गरिन्छ :

$$\text{स्तरीय भिन्नताको गुणाङ्क} = \frac{\text{स्तरीय भिन्नता}}{\text{मध्यक}}$$

$$= \frac{\sigma}{\bar{X}}$$

स्तरीय भिन्नता वा प्रमाणिक विचलनको गुणाङ्क तुलनात्मक रूपमा जति सानो हुन्छ त्यति नै बढी तथ्याङ्कहरू वा वितरणमा एकरूपता वा स्थिरता भएको अर्थात विविधता न्यून भएको मानिन्छ । सामान्यतया स्तरीय भिन्नताको गुणाङ्क धेरै सानो हुने हुँदा यसलाई 100 ले गुणन गरी प्रतिशतमा बदलेर प्रयोग गर्ने गरिन्छ र त्यसलाई विचरणशीलताको गुणाङ्क (coefficient of variation) भनिन्छ ।

अत: विचरणशीलतको गुणाङ्क (coefficient of variation) = $\frac{\sigma}{\bar{X}} \times 100\%$

उदाहरण 1

निम्न लिखित तथ्याङ्कको स्तरीय भिन्नताको गुणाङ्क र विचरणशीलताको गुणाङ्क पत्ता लगाउनुहोस् :

तापक्रम (°C) = 5, 6, 7, 8, 9

समाधान

दिइएको वितरणलाई तालिकामा प्रस्तुत गर्दा,

तपक्रम (°C) x	d = x - A	d^2
5	5-7= -2	4
6	6-7= -1	1
7	7-7= 0	0
8	8-7=1	1
9	9-7=2	4
Σx= 35°		Σd^2 = 10

यहाँ N = 5

अत: मध्यक ($\bar{x}$) = A = $\frac{\Sigma x}{N} = \frac{35}{5} = 7$

सूत्रअनुसार, स्तरीय भिन्नता (σ) = $\sqrt{\frac{\sum d^2}{N}} = \sqrt{\frac{10}{5}} = \sqrt{2} = 1.41$

अब स्तरीय भिन्नताको गुणाङ्क = $\frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{1.41}{7} = 0.2014$

पुन : विचरणशीलताको गुणाङ्क $\frac{\sigma}{\bar{x}} \times 100\% = \frac{1.41}{7} \times 100\% = 20.142\%$

उदाहरण 2

पाँच ओटा संस्थागत विद्यालयको मासिक शिक्षण शुल्क निम्नअनुसार छ :

मासिक शुल्क (रु.) 300, 325, 350, 375, 425

यस तथ्याङ्कको आधारमा प्रमाणिक विचलन यसको गुणाङ्क र विचरणशीलताको गुणाङ्क पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान

दिइएको तथ्याङ्कबाट

शुल्क रु. (x)	x^2
300	90000
325	105625
350	122500
375	140625
425	180625
Σx = 1775	Σx^2 = 639375

अब प्रत्यक्ष विधिको सूत्रअनुसार

स्तरीय भिन्नता (σ) = $\sqrt{\frac{\sum x^2}{N} - \left(\frac{\sum x}{\mathrm{N}}\right)^2}$

यहाँ N = 5, Σx = 1775 , Σx^2 = 639375

अतः (σ) $= \sqrt{\frac{639375}{5} - \left(\frac{1175}{5}\right)^2}$

$= \sqrt{127875 - 126025} = \sqrt{1850} = 43.01$

पुनः मध्यक (X) = $\frac{\sum x}{\mathrm{N}} = \frac{1775}{5} = 355$

अब सूत्रअनुसार प्रमाणिक विचलनको गुणाङ्क $= \frac{\sigma}{\overline{\mathrm{X}}} = \frac{43.01}{355} = 0.12$

र विचरणशीलताको गुणाङ्क $= \frac{\sigma}{\bar{x}} \times 100\% = \frac{43.01}{355} \times 100\% = 12\%$

(ख) **खण्डित श्रेणी (Discrete Series) को स्तरीय भिन्नता**

यदि एउटा खण्डित श्रेणीका पदहरू $x_1, x_2, x_3, \ldots$ को बारम्बारता क्रमश : $f_1, f_2, f_3, \ldots.. f_n$ छ, अर्थात,

पद/चर (x)	x_1	x_2	x_3	...	x_n
बारम्बारता (f)	f_1	f_2	f_3	...	f_n

भए यसको स्तरीय भिन्नताको गणना निम्न सूत्रहरू प्रयोग गरी गर्न सकिन्छ :

(i) अप्रत्यक्ष विधि

स्तरीय भिन्नता ((σ) = $\sqrt{\frac{\sum f(x-\bar{x})^2}{N}} = \sqrt{\frac{\sum fd^2}{N}}$

(ii) प्रत्यक्ष विधि

स्तरीय भिन्नता (σ) = $\sqrt{\frac{\sum fd^2}{N} - \left(\frac{\sum fd}{N}\right)^2}$

वा स्तरीय भिन्नता (σ) = $\sqrt{\frac{\sum fx^2}{N} - \left(\frac{\sum fx}{N}\right)^2}$

यहाँ x = कुनै पदको मान

$\overline{X}$ = मध्यक

d = x - A = श्रेणीको प्रत्येक पद र मध्यक वा औसत बिचको फरक

A = मध्यक वा काल्पनिक मध्यक

N = जम्मा पद सङ्ख्या = $\sum f$

f = सम्बन्धित पदको बारम्बारता

उदाहरण 3

तलका तथ्याङ्कको स्तरीय भिन्नता त्यसको गुणाङ्क र विचरणशीलताको गुणाङ्क पत्ता लगाउनुहोस् ।

बिरुवाको उचाइ (cm)	10	20	25	30	35	40
सङ्ख्या	1	5	10	12	8	4

समाधान

दिइएको तथ्याङ्कलाई निम्न तालिकामा प्रस्तुत गर्दा,

x	f	fx	d = x - $\bar{x}$	d^2	fd^2
10	1	10	-19	361	361
20	5	100	-9	81	405
25	10	250	-4	16	160
30	12	360	1	1	12
35	8	280	6	36	288
40	4	160	11	121	448
	$\Sigma x = 40$	$\Sigma fx = 1160$			$\Sigma fd^2 = 1710$

यहाँ,

मध्यक $(\bar{x}) = \frac{\Sigma fx}{\Sigma f} = \frac{1160}{40} = 29$

पुन : सूत्रअनुसार स्तरीय भिन्नता $(\sigma) = \sqrt{\frac{\sum f(x-\bar{x})^2}{N}} = \sqrt{\frac{\sum fd^2}{N}} = \sqrt{42.75} = 6.54$

अत : स्तरीय भिन्नताको गुणाङ्क $= \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{6.54}{29} = 0.225$

विचरणशीलताको गुणाङ्क $= \frac{\sigma}{\bar{x}} \times 100\% = 0.225 \times 100\ \% = 22.5\%$

उदाहरण 4

दिइएको श्रेणीको स्तरीय भिन्नता पत्ता लगाउनुहोस् :

प्राप्ताङ्क	10	20	25	30	40
विद्यार्थी सङ्ख्या	1	3	10	6	1

समाधान

मानौँ, उपर्युक्त तथ्याङ्कको काल्पनिक मध्यक (A) = 25 अब उक्त तथ्याङ्कलाई निम्नअनुसारको तालिकामा प्रस्तुत गर्दा,

प्राप्ताङ्क	विद्यार्थी सङ्ख्या (f)	D = x - 25	d^2	fd	fd^2
10	1	-15	225	-15	225
20	3	-5	25	-15	75

25 30 40	10 6 1	0 5 15	0 25 225	0 30 15	0 150 225
	N = 21			Σfd = 30	Σfd^2 =675

सूत्रअनुसार,

स्तरीय विचलन (σ) = $\sqrt{\frac{\Sigma fd^2}{N} - \left(\frac{\Sigma fd}{N}\right)^2}$

$$= \sqrt{\frac{675}{21} - \left(\frac{30}{21}\right)^2} = \sqrt{32.14 - 0.5} == \sqrt{31.64} = 5.62$$

अभ्यास 8.3

1. (a) स्तरीय भिन्नताको परिभाषा लेख्नुहोस् ।

   (b) वैयक्तिक श्रेणी र खण्डित श्रेणीमा स्तरीय भिन्नता पत्ता लगाउने सूत्रहरू लेख्नुहोस् ।

   (c) प्रमाणिक विचलनको गुणाङ्कको परिचय दिनुहोस् ।

   (d) मध्यक भिन्नता र स्तरीय भिन्नताबिच के के फरक छ ? व्याख्या गर्नुहोस् ।

   (e) विचरणशीलताको गुणाङ्क भनेको के हो ? स्पष्ट पार्नुहोस् ।

2. निम्न तथ्याङ्क वा श्रेणीको स्तरीय भिन्नता, त्यसको गुणाङ्क र विचरणशीलताको गुणाङ्क पत्ता लगाउनुहोस् ।

   (a) प्राप्ताङ्क : 10, 20, 30, 40, 50

   (b) बेर्नाको उचाइ (cm) : 6, 5, 7, 8, 9, 10

   (c) प्राप्ताङ्क : 60, 50, 80, 40, 90, 95, 70

   (d) तापक्रम : (°C) : 30, 28, 35, 25, 20, 42

   (e) वर्षा (mm) : 34, 23, 46, 37, 40, 28, 32, 35, 44, 50

   (f) तौल (kg) : 40, 50, 60, 70, 80, 90, 100, 110 120 130

3. दिइएको विवरणका आधारमा बारम्बारता तालिका बनाई प्रमाणिक विचलन पत्ता लगाउनुहोस् ।

   (a) उचाइ (cm) : 20, 20, 10, 20, 10, 30, 30, 40, 20, 30, 30, 40, 30, 30, 40, 30, 50, 40, 30, 40

   (b) ज्याला प्रतिघण्टा (रु.) : 55, 65, 35, 55, 45, 75, 55, 65, 75, 55, 45, 65, 35, 75, 45, 55, 65, 75, 55, 65

(c) मूल्य (रु.) : 2, 8, 6, 10, 8, 12, 10, 8, 6, 4, 8, 4, 6, 12, 8, 10, 14

4. निम्न लिखित तथ्याङ्कका आधारमा स्तरीय भिन्नता, सोको गुणाङ्क र विचरणशीलताको गुणाङ्क पत्ता लगाउनुहोस् :

(a)

उचाइ (inch)	10	20	30	40	50
बिरुवाको सङ्ख्या	8	12	15	9	6

(b)

दैनिक ज्याला ($)	122	121	120	124	123	125
कामदार सङ्ख्या	14	9	5	8	5	9

(c)

उमेर (वर्ष)	10	12	13	14	15	16
बच्चाको सङ्ख्या	8	13	19	20	11	5

(d)

प्राप्ताङ्क	35	45	50	55	60	65	70	75
विद्यार्थी सङ्ख्या	8	4	5	5	6	6	6	7

(e)

वर्षा (cm)	5	15	25	35	45
दिन	2	9	10	7	1

5. कुनै एकाइ वा त्रैमासिक परीक्षाका सबै विद्यार्थीहरूको प्राप्ताङ्क विवरण सङ्कलन गरी खण्डित श्रेणीमा हुने गरी तालिकीकरण गरी त्यसको स्तरीय विचलन सोको गुणाङ्क र विचरणशीलताको गुणाङ्क पत्ता लगाउनुहोस् ।

उत्तर माला

अभ्यास 1.1.1

1. शिक्षकलाई देखाउनुहोस् । 2. शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।

3. (a) $x = 5, y = 4$ (b) $x = 7, y = 5$

   (c) $x = 5, y = -12$ (d) $x = 7, y = 0$ (e) $x = 2, y = 1$

4. शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।

अभ्यास 1.1.2

1. शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।

2. (a) {(2,7),(3, 7)} (b) {(4, 2), (5, 2), (6, 2), (4, 3), (5, 3), (6, 3)}

3. (a) A = {a, b}, B= {1, 2, 5} n(A) =2, n(B) = 3

   B x A = {1, a), (2, a), (5, a), (1, b), (2, b) (5, b)}, n(B xA) = 6

   (b) A = {1, 2, 3} B, = {4, 5, 6}, n(A) = 3, n(B) = 3

   B x A = { (4, 1), (5, 1), (6,1), (4, 2) (5, 2), (6, 2), (4, 3) (5, 3),(6, 3)}, n(B x A) = 9

4.(a) A X B = { (1, 2), (1, 3), (2, 2), (2, 3), (3, 2), (3, 3) (4, 2) (4, 3)}

   B x A ={ (2, 1), (3, 1), (2, 2), (3, 2), (2, 3), (3, 3), (2, 4), (3, 4)}

   (b) A x B= { (3, 0), (4, 0), (5, 0), (6, 0) (3, 3) (4, 3), (5, 3), (6, 3)}

5. शिक्षकलाई देखाउनुहोस् । 6. शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।

अभ्यास 1.1.3(A)

1. शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।

2. (a) R_1 = {(1, 5), (2, 4)}

   R_2 = {(2, 4), (1, 5),(1, 6), (2, 4), (2, 5), (2, 6), (3, 4), (3, 5), (3, 6)}

   R_3= {(2, 4)}

3. (a) {(3, 2) (b) {(2, 2)}, (3, 3) (c) ϕ (d) {(1, 2), (2, 4)} (e) ϕ

4. शिक्षकलाई देखाउनुहोस् । 5. शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।

अभ्यास 1.1.3 (B)

1. शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।

2. (a) क्षेत्र = {1, 2, 3} विस्तार = {2, 3, 4} (b) क्षेत्र = {2, 3, 4} विस्तार = {3, 4, 6}

   (c) क्षेत्र = {2, 3, 4} विस्तार = {5, 6, 7}

3. R = {(1, 5), (2, 5), (3, 7), (4, 6)}

(i) क्षेत्र = {1, 2, 3, 4} (ii) विस्तार= {5, 6,7} (iii) R^{-1} = {(5, 1), (5, 2), (7, 3), (6, 4)}

4. R = {(2, 2), (2, 4), (2, 6), (2, 8), (3, 3), (3, 6), (3, 9), (4, 4) (4, 8), (5, 5), (6, 6), (7, 7), (8,8) (9, 9)}

(i) क्षेत्र = {2,3, 4, 5, 6, , 7, 8, 9}

(ii) विस्तार = {2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}

(iii) R^{-1} ={(2, 2),(4,2), (6,2), (8,2), (3,3), (6, 3), (9, 3), (4,4), (8,4), (5,5), (6,6), (7,7), (8, 8), (9, 9)}

5. R रिफ्लेक्सिभ हुन्छ । R सिमेट्रिक हुँदैन । R ट्रान्जेटिभ हुन्छ ।

6. (i) क्षेत्र = {2, 3}, विस्तार क्षेत्र = {5, 7} विपरीत सम्बन्ध = {(5,3), (5,3), (7,2), (7,3)}

अभ्यास 1.1.4 (A)

शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।

अभ्यास 1.1.4 (B)

शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।

अभ्यास 1.1.4 (C)

शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।

अभ्यास 1.1. 4 (D)

1. शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।

2. (a) f(2) = 13, f(3) = 17, f(5) = 25 (b) $x = 2$ (c) $x = 3$

3. (a) R = { -4. -2. 2} (b) R = {4, 10, 16} (c) R = {5, 2, -1, -4, -7}

4. (a) f(x) = 5x + 2, f(5) = 27 (b) f(x) = 3x + 1, f(3) =10

5. (a) h -5, $x + x$-5, 1 (b) $3\frac{2}{5}, 0$

अभ्यास 1.2.1

1. र 2. शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।

3. (a) 3 (b) 4 (c) 5 (d) 4 (e) 5 (f) 7

4, 5 र 6 शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।

अभ्यास 1.2.2

1. शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।

2.(a) $4x^3 - 2x^2 + 2x - 7$ (b) $8x^3 + 3x^2 - 4$

3. (a) $x^7 - x^6 - 2x^5 + 5x^2 + x + 9$ (b) $3x^3 - 12x^2 + 9x + 6$

4. (a) $x^6 - 1$ (b) $x^3 + 1$ (c) $x^5 - 4x^4 + 9x^3 - 11x^2 + 6x - 4$

5. $-x^3 + 4x^2 + 4x + 17$ 6. $\frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{3}x - 1$

7. (a) $x^2 + 2x + 1$ (b) $3x^2 + x + 9$ (c) $2y^3 + 2y^2 + 3y - 5$

अभ्यास 1.3.1

1(a) 11, 13 (b) 4, 6 (c) -2, -6 (d) 0, -5 (e) 80, 160 (f) 4, 2

2. (a) 5, 8, 11, 14, 17, . . ., . .. (b) 0, 3, 8, 15, 24, . . . , . ..

(c) 2, 4, 8, 16, 32, . . ., . . . (d) -1, 4,-9,16, -25 . . ., . . .

अभ्यास 1.3.2

1. शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।

2. (a) (2n + 3) (b) 8 - 3n (c) 4n + 3 (d) $n^2 + n$ (e) $-4n^2 + n + 7$

(f) $\frac{3n-2}{2n+1}$ (g) $\frac{3n-1}{n+6}$

3.(a) 5n - 3 (b) $4n^2$ (c) $\frac{1}{2}n(n+1)$ (d) $n^2 + n$

अभ्यास 1.3.3.

1. र 2. शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।

3. (a)$\sum_1^7(3n-1$(b) $\sum(-1)^n n$ (c) $\sum_1^{14}(a-\mathrm{n})^{\mathrm{n}}$

4. (a) 18 (b) 26 (c) 90 (d) $\frac{764}{315}$

अभ्यास 2.1

शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।

अभ्यास 2.2

शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।

अभ्यास 2.3

शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।

अभ्यास 2.4

1., 2. र 3. शिक्षकलाई देखाउनुहोस् 4. (a) 1 (b) 0

अभ्यास 2.5

शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।

अभ्यास 3.1

1. (a) देखि (c) सम्मका उत्तरहरू शिक्षकलाई देखाउनुहोस् । (d) 6

2. (a) (i) $A_{3\times 3}$ (ii) $B_{3\times 2}$ (iii) $C_{1\times 3}$ (iv) $D_{3\times 1}$

3. 3 x 3, $M_{3\times 2}$

4. $a_{11}=2$, $a_{22}=3$, $a_{32}=7$

5. शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।

अभ्यास 3.2

1. शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।

2. (a) विकर्ण मेट्रिक्स (diagonal matrix) (b) लहर मेट्रिक्स (column matrix)
(c) आयाताकार मेट्रिक्स (rectangular matrix) (d) पङ्क्ति मेट्रिक्स (row matrix)
(e) शून्य मेट्रिक्स (zero matrix)

3. (a) $M=\begin{bmatrix}3 & 4\\ 5 & 6\end{bmatrix}_{2\times 2}$ (b) $N=\begin{bmatrix}0 & -1 & -2\\ 1 & 0 & -1\end{bmatrix}_{2\times 3}$ (c) $A=\begin{bmatrix}1 & 8 & 27\\ 8 & 64 & 216\\ 27 & 216 & 729\end{bmatrix}_{3\times 3}$

4. (a) x = -2, y =2, w = 7 र z =5 (b) x = 7, y = 2, p = 2, q = -1
(c) p = 3, q = 1

अभ्यास 3.3

1. शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।

2. (a) M र N, R र T, Q र R, T र Q

(b) (i) $\begin{bmatrix}1 & 3 & 2\\ 2 & 5 & 3\end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix}a-3 & b-4\\ c-7 & d-9\end{bmatrix}$ (iii) $\begin{bmatrix}e+1 & f+1 & g-2\\ h+2 & i+1 & j-3\end{bmatrix}$

3. (a) शिक्षकलाई देखाउनुहोस् । (b) $\begin{bmatrix}-a & -b\\ -c & -d\end{bmatrix}$

4. (a) x = 2, y =1 (b) x = 5, y = 3 (c) x = 2, y =-2, z = -6 (d) x = 2, y = 1

5. (a) (i) X = $[9 \quad 21 \quad 4]$ (ii) X = $[-1 \quad -11 \quad 8]$ (iii) X = $[5 \quad 16 \quad -2]$

(b) (i) Y = $\begin{bmatrix}-1\\ 7\end{bmatrix}$ (ii) Y = $\begin{bmatrix}0\\ 4\end{bmatrix}$ (iii) Y = $\begin{bmatrix}-3\\ -5\end{bmatrix}$

6. शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।

अभ्यास 3.4

1. शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।

2. $A^T=\begin{bmatrix}p\\ q\\ r\end{bmatrix}$, $B^T=[\mathrm{m} \quad \mathrm{n} \quad \mathrm{o}]$

$C^T = \begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\6 & 7 & 8\end{bmatrix}$, $D^T = \begin{bmatrix}3 & 18\\9 & 21\\12 & 27\end{bmatrix}$, $E^T = \begin{bmatrix}x & y & z\\p & q & r\\a & b & c\end{bmatrix}$

3. शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।   4. शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।

अभ्यास 3.5

1. शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।

2. (a) $\begin{bmatrix}21 & -7\\28 & 14\end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix}4 & 17 & 6\\0 & 13 & 26\end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix}-3 & 14\\8 & 8\end{bmatrix}$

(d) x = 6, y = -5, z = 4   (e) $\begin{pmatrix}2 & 0\\-2 & -6\end{pmatrix}$

3 (a) (i) $[23]$ (ii)$\begin{bmatrix}1 & 5\\3 & 15\end{bmatrix}$ (iii) $[-12]$

b.(i)$\begin{bmatrix}2 & -1\\-1 & 3\end{bmatrix}$ (ii)$\begin{bmatrix}0 & 3\\1 & -1\end{bmatrix}$ (iii)$\begin{bmatrix}7 & 6\\4 & 7\end{bmatrix}$

(iv)$\begin{bmatrix}5 & 4\\4 & 5\end{bmatrix}$ (v)$\begin{bmatrix}5 & 10\\6 & 3\end{bmatrix}$ (c)MN= $\begin{bmatrix}-11 & -5\\-18 & -21\end{bmatrix}$ $\mathrm{NM} = \begin{bmatrix}-4 & 8 & 15\\2 & 8 & 24\\-3 & -12 & -36\end{bmatrix}$

(d), (e), (f) शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।

4. (a) $\begin{bmatrix}1/4 & 1/2\\2/5 & 4/5\end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix}-1\\2\end{bmatrix}$ (c) x = 8, y =126, z =$\frac{17}{3}$

(d) $\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$ (e)$\begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix}$ (f) $x =\frac{3}{2}$, y = o, z = 2

5. शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।

6. शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।

अभ्यास 4.1

1. शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।

2. (a) 2 एकाइ (b) $2\sqrt{10}$ एकाइ   (c) 5 एकाइ   (d) 4 एकाइ

3. शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।

4. शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।

5. (a) 3   (b) $-\frac{1}{2}$

6. (a) $x = 1$ (b) $y^2 - 2x - 4y + 5 = 0$ (c) $x^2 + y^2 - 16 = 0$

   (d) $y^2 + 4x - 10y + 29 = 0$

7. (a) $x^2 + y^2 = 49$ (b)(i) $x - 3y - 13 = 0$ (ii) $x^2 + y^2 = 22x + 20y + 117 = 0$

(iii) $x^2 + y^2 - 6x - 4y - 39 = 0$

8. (a) $15^2 + 15y^2 + 4x - 22y + 3 = 0$ (b) $3x^2 + 3y^2 + 2x + 16y + 15 = 0$

(c) $8x^2 + 8y^2 + 6x - 36y + 27 = 0$ (d) $x^2 - 3y^2 - 6x - 8y + 25 = 0$

(e) $3x^2 + 4y^2 + 4x - 10y + 100 = 0$

9. शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।

अभ्यास 4.2

1. शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।
2. (a) $\left(\frac{12}{7}, \frac{2}{7}\right)$ (b) $\left(0, -\frac{11}{5}\right)$ (c) $\left(\frac{32}{7}, -\frac{19}{7}\right)$
3. (a) (15, 8) (b) (25, -22) (c) (9, 0)
4. (a) 4:5 (b) 3:-2 (c) 1:3
5. (a) (-1, -4) (b) (-5, 0) (c) (8, 4)

   (d) AB को मध्यबिन्दु $=\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$, BC को मध्यबिन्दु $= \left(\frac{-3}{2}, 3\right)$, CA को मध्यबिन्दु $= \left(0, \frac{1}{2}\right)$
6. (a) (2, -1) र (3, 1) (b) $\left(-\frac{1}{3}, 0\right)$ र $\left(\frac{-5}{3}, 0\right)$ (c) (5, 0) र (15, 5)
7. (a) 1:3 (b) 4:3 (c) $\frac{-37}{13}$ (d) 25
8. शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।
9. (a) (2, 5) (b) (6, 8) (c) (3, 4)
10. (a) x = 7, y =6 (b) (3, 6) र (1, 2)
11. शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।

अभ्यास 4. 3 (A)

1. शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।
2. (a) $x - 2 = 0$ (b) $x - 5 = 0$ (c) $x + 4 = 0$
3. (a) $y - 2 = 0$ (b) $y + 4 = 0$ (c) $y - 6 = 0$
4. (a) $x - 3 = 0$ (b) $x + 7 = 0$ (c) $6x - 5 = 0$
5. (a) $y - 3 = 0$ (b) $4y - 3 = 0$ (c) $3y - 2 = 0$
6.

	m	c
(a)	3	2
(b)	5	-2
(c)	-2	4

(d)	12	4
(e)	$\frac{1}{2}$	$\frac{-2}{3}$
(f)	5	4
(g)	-1	-1
(h)	1	5
(i)	1	$\frac{3}{5}$
(j)	$\sqrt{3}$	0

7. (a) 5x – y + 3 = 0 (b) 2x + y + 1 = 0 (c) 3x – y = 0
(d) x + 3y – 3 = 0 (e) 3x + 4y – 2 = 0 (f) x - $\sqrt{3}$y $- 3\sqrt{3} = 0$
(g) $\sqrt{3}x - y + 5 = 0$ (h) $\sqrt{3}x + y - 3 = 0$ (i) $\sqrt{3}x + y - 7 = 0$
(j) x – y = 0 (k) $\sqrt{3}x + y = 0$ (l) $\sqrt{3}x - y = 0$
(m) $x + \sqrt{3}y = 0$

अभ्यास 4.3 (B)

1. शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।

2.

	x – खण्ड (a)	y- खण्ड (b)
(a)	3	4
(b)	-3	-5
(c)	$\frac{-15}{2}$	12
(d)	$\frac{10}{3}$	15
(e)	$\frac{1}{2}$	1

3.(a) 4x – 3y – 12 = 0 (b) 4x -3y – 12 =0 (c) 2x + y – 10 = 0
(d) 3x – 2y + 6 =0 (e) 3x + 2y + 6 =0 (f) 15x + 3y - 9 = 0
4. (a) x + y – 11 =0 (b) x + y -1 = 0 (c) x + y – 7 = 0 (d) x + y – 8 = 0
(e) x – y + 1 = 0 (f) x –y – 1 = 0 (g) x – y – 9 = 0 (h) 2x + y – 10 0
(i) x + 2y – 7 = 0 (j) x + y - 7 = 0, 4x +3y - 24 = 0
5. (a) 3x – 2y – 12 = 0 (b) 3x + 2y -12 =0 (c) 6x + 4y – 21 = 0

अभ्यास 4.3 (C)

1. शिक्षकलाई देखाउनुहोस्

2. (a) x - $\sqrt{3}y - 2 = 0$ (b) $\sqrt{3}x + y - 8 = 0$ (c) Y = 2 (d)x - $\sqrt{3}y - 8 = 0$

(e) y - $\sqrt{3}x - 4 = 0$ (f) x + $\sqrt{3}y - 18 = 0$ (g) x - $\sqrt{3}y + 6 = 0$

(h) x + y - $13\sqrt{2}$ = 0 (i) $7x - 7y + 5\sqrt{2} = 0$ (j) $x - \sqrt{3}y + 4\sqrt{2} = 0$

3. (a) $\frac{2}{13}x + \left(\frac{3}{\sqrt{13}}y\right) = \frac{-5}{\sqrt{13}}$ (b) x cos135° + y sin 135° = 0

(c) $x$cos 135° + ysin135° =$2\sqrt{2}$ (d)$\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y = 3$

(e) $x$cos240° + ysin 240° = 2 (f) $x$cos315° + ysin 315° =$\frac{5}{\sqrt{2}}$

(g) $\frac{5}{13}x - \frac{12}{13}y = 1$ (h) $x$cos 135° + ysin 135° = 0

(i) xcos 150° + ysin 150° = ${-5}/{2}$ (j) x cos60° + ysin 60° =$\frac{4\sqrt{3}}{2}$

4. (a) y =$\frac{-\sqrt{3}}{2}x + \frac{7}{2}$; $\frac{x}{7/\sqrt{3}} + \frac{y}{7/2} = 1$ (b) y = $\frac{4}{5}x + 5$;$\frac{x}{5} + \frac{y}{4} = 1$

(c) y =x – 6; $\frac{x}{6} + \frac{y}{6} = 1$ (d) y = $\frac{3}{2}x + 4$;$\frac{x}{-8/3} + \frac{y}{4} = 1$

(e) $y = \frac{3}{4}x + 2$;$\frac{x}{-8/3} + \frac{y}{-2} = 1$ (f) $y = \frac{-5}{6}x - \frac{1}{6}$ 0;$\frac{x}{-1/5} + \frac{y}{\frac{-1}{6}} = 1$

5. शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।

अभ्यास 4. 3 (D)

1. शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।

2. (a) x + y + 1 = 0 (b) $\sqrt{3}x - y - 2(1 + \sqrt{3}) = 0$

(c) X –y – 1 = 0 (d) X - $\sqrt{3}y + 3\sqrt{3} - 1 = 0$

(e) X + $\sqrt{3}y - 4 - 5\sqrt{3} = 0$ (f) X - 3y + 5 = 0

3. (a) 7x +6y + 4= 0 (b) 2x – y + 4 = 0 (c) 2x + y – 2 =0

(d) x +y - 7 = 0 (e) 2x + y – 1 = 0 (f) x – y + 1= 0

(g) 10x + 7y – 11 = 0 (h) ax –by – ab =0 (i) bx + ay – ab =0

(j) (a – 2b) x – by + b^2 + 2ab – a^2 = 0

4. शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।

5. (a) 2 (b) 6 (c) $\frac{20}{3}$

6. (a) $3x - y + 1 = 0$; $7x + y - 10 = 0$; $x + 3y + 6 = 0$

(b) $x - 1 = 0$; $x - 3y + 3 = 0$; $10x - 6y - 2 = 0$

(c) $3x + 4y - 14 = 0$ (d) 5; $3x + 4y - 9 = 0$

अभ्यास 4.4

1. शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।

2. (a) $\frac{3}{2}\sqrt{2}$ (b) $\sqrt{3} - 1$ (c) $2 - \sqrt{2}$ (d) $\frac{33}{5}$ (e) $\frac{22}{13}$ (f) $\frac{2}{5}$ (g) $\frac{12}{13}$ (h) $\frac{\sqrt{5}}{2}$
(i) $\frac{7}{5}$ (j) $4\sqrt{2}$

2. (a) 8 units (b) $\sqrt{34}$units (c) 2.4 units (d) $^{11}/_{5}$units (e) 2 एकाइ

4. (a) 1 (b) 20 or 6 (c) -6 (d) 3 or $\frac{13}{21}$

अभ्यास 4.5

1. शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।

2. (a) 26 वर्ग एकाइ (b) 12 वर्ग एकाइ (c)11 वर्ग एकाइ (d) 9 वर्ग एकाइ

(e) 10 वर्ग एकाइ (f) $\frac{1}{2}(ab + bc + ca - a^2 - b^2 - c^2)$ (g) a^2 वर्ग एकाइ

(h) a^2 वर्ग एकाइ (i) 4. 5 वर्ग एकाइ (j) 15 वर्ग एकाइ

3. शिक्षकालाई देखाउनुहोस् ।

4. (a) 4 वर्ग एकाइ (b) 20, 5 वर्ग एकाइ (c) 5.5 वर्ग एकाइ (d) 5 वर्ग एकाइ
(e) 96 वर्ग एकाइ (f) 84 वर्ग एकाइ (g) 41 वर्ग एकाइ (h) 9 वर्ग एकाइ
(i) 44 वर्ग एकाइ (j) 16 वर्ग एकाइ

5. (a) 4 (b) शिक्षकलाई देखाउनुहोस् । (c) $\frac{2}{3}$ (d) -2 र $\frac{1}{2}$

6. (a), (b) शिक्षकलाई देखाउनुहोस् । (c) 11 (d) -3

7. शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।

अभ्यास 5.1

1.(a) $164121''$ (b) $219040''$ (c) $110450''$ (d) $199810''$ (e) $34548''$ (f) $201388''$

2.(a) 25.7883° (b) 30.2542° (c) 49.8402° (d) 44.4236° (e) 80.8389° (f) 55.9411°

3. (a) $302010''$ (b) $251510''$ (c) $453525''$ (d) $301200''$ (e) $250015''$ (f) $474849''$

4. (a) 50.408° (b) 40.3233^g (c) 56.855^g (d) 45.0035^g (e) 37.5^g (f) 98.4237°

5. (a) 45° (b) 72° (c) 121.5° (d) 144° (e) 63° (f) 225°

6. (a) 50^g (b) 300^g (c) 20^g (d) 40^g (e) 120^g (f) 60^g

7. (a) 36° (b) 30^g (c) 40°, 60°, 80° (d) 50^g, 70^g, 80^g

(e) 30^g, 80^g, 90^g (f) 60°, 80°, 100^0, 120°

8. (a) $\frac{3\pi}{10}$ (b) $\frac{\pi^c}{5}$ (c) $\frac{\pi^c}{6}$ (d) $\frac{\pi^c}{4}$ (e) $\frac{\pi^c}{3}$ (f) $\frac{\pi^c}{4}$

9. (a) $\frac{\pi^c}{4}$ (b) $\frac{\pi^c}{8}$ (c) $\frac{5\pi^c}{8}$ (d) $\frac{5\pi^c}{4}$ (e) $\frac{2\pi^c}{5}$ (f) $\frac{3\pi^c}{4}$

10. (a) 90° (b) 270° (c) 25.2° (d) 80° (e) 75° (f) 20°

11. (a) 40^g (b) 60^g (c) 32^g (d) 50^g (e) 25^g (f) 300^g

12. (a) $\frac{2\pi^c}{3}$ (b) $\frac{3\pi^c}{4}$ (c) $\frac{3\pi^c}{8}$ (d) $\frac{\pi^c}{4}$

13. (a) 45.82cm (b) 11.78cm (c) 6.36cm (d) 51.55° (e) 39.02°

(f) 6.23cm (g) 12.22m (h) 13.44m (i) 233cm (j) 895.69m

14. शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।

अभ्यास 5.2

1. (a) $\cos\theta = \frac{12}{13}$ $\tan\theta = \frac{5}{12}$, $\cot\theta = \frac{12}{5}$, $\sec\theta = \frac{13}{12}$ $\text{cose}\theta = \frac{13}{5}$

(b) $\sin\theta = \frac{1}{2}$, $\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\tan\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $\cot\theta = \sqrt{3}$, $\text{cosec}\theta = 2$

(c) $\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos\theta = \frac{1}{2}$, $\tan\theta = \sqrt{3}$, $\cot\theta = 2$, $\text{cosec} = \frac{2}{\sqrt{3}}$

(d) $\sin\propto = \frac{7}{25}$, $\tan\propto = \frac{7}{24}$, $\sec\propto = \frac{25}{24}$, $\cot\propto = \frac{24}{7}$, $\text{cotes}\propto = \frac{25}{7}$

(e) $\sin A = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\cos A = \frac{1}{\sqrt{2}}$ $\tan = 1$ $\cot A = 1$ $\sec = \sqrt{2}$

2. (a) $\frac{-1}{5}$ (b) $\frac{1}{18}$ (c) 7 (d) 7 (e) 22

3. (a) $\frac{33}{65}$ (b) $\frac{56}{65}$ (c) $\frac{63}{65}$ (d) $\frac{-16}{65}$ (e) $\frac{-63}{16}$

4. (a) $\frac{m^2-n^2}{2m^n}$, $\frac{m^2+n^2}{m^2-n^2}$, (b), (c), (d) शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।

अभ्यास 5.3

1. (a) $\frac{1}{4}$ (b) $\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$ (c) $\frac{5\sqrt{3}}{4}$ (d) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (e) $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2}$ (f) 2 (g) 2 (h) 0

(i) 3 (j) $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{6}}{4}$

2. (a) $\frac{13}{12}$ (b) 0 (c) $\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$ (d) 2 (e) -3 (f) 6 (g) 8

(h) $\frac{9}{8}$ (i) $\frac{22}{9}$ (j) $\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$ 3. शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।

4. (a) -4 (b) 3 (c) 3 (d) 4 (e) 1

5-6. शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।

अभ्यास 5.4

(a) $\sin^2A - \sin^2B$ (b) $\sin^2\theta$ (c) $\cos^2\theta$ (d) $1 - \cot^4A$

(e) $1 - \sin^4A$ (f) $1 - \tan^4A$

2. (a) (cosA + sinA) (cosA sinA) (b) (secA - cosecA) (secA + cosecA)

(c) $\cos^2A\ (1+ \sin^2A)$ (d) $(\tan\theta - \cot\theta)\ (1 + \tan^2\theta + \cot^2\theta)$

(e) $(\cos\theta + \text{cosec}\theta)\ (\sec\theta - \text{cosec}\theta)(\sec^2\theta + \text{cosec}^2\theta)$ (f) $(\sin x + 1)\ (\sin x + 2)$

3 देखि 8 सम्म शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।

अभ्यास 5.5

1. (a) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ (b) $\frac{1}{2}$ (c) $\frac{-2}{\sqrt{3}}$ (d) $\sqrt{3}$ (e) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (f) $-\frac{1}{2}$
(g) $-\frac{1}{2}$ (h) 2 (i) 0 (j) $\frac{11}{4}$ (k) $\frac{-1}{3}$ (l) $\frac{11}{4}$
(m) $\frac{9}{4}$ (n) $\frac{9}{2}$ (o) 2 (p) 1 (q) 2

2. (a) $-\text{cosec}\theta$ (b) $\sin\theta.\tan^2\theta$ (c) $-\tan\theta$ (d) $-\sec^2\theta$

(e) secA cosecA (f) $\sin\theta\cos\theta$ (g) $-\tan^2\theta$ (h) $\tan^2\theta$

(i) $\text{cosec}\theta.\sec\theta$ (j) -1

3. शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।

4. (a) $\tan\theta$ (b) $\sin\theta$ (c) $\frac{2}{\sqrt{3}}$ (d) $\frac{9}{2}$ (e) $\frac{2}{3}$ (f) $\tan^2\theta$ (g) $\cot^2\propto$
(h) $\cot^2A$ (i) $-\sec A\ \text{cosec}^2A$ (j) $\cot^2A$

अभ्यास 5.6

1. (a) $\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$ (b) $\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$ (c) $2-\sqrt{3}$ (d) $\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$ (e) $2+\sqrt{3}$

(f) $\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$ (g) $\frac{1-\sqrt{3}}{2}$ (h) $-(2+\sqrt{3}$

2. शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।

3. (a) $\frac{63}{65}$ (b) $\frac{-16}{65}$ (c) $\frac{-63}{16}$ (d) $\frac{-33}{65}$ (e) $\frac{56}{65}$ (f) $\frac{-33}{56}$

4. देखि 10 सम्मको शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।

अभ्यास 6.1

1, 2, 3. शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।

4. (a) $\begin{pmatrix}-3\\-5\end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix}6\\-5\end{pmatrix}$ 5. (a) $3\sqrt{2}, 45°$ (b) 5, 143.13° (c) 10,240°

6. (a) $\begin{pmatrix}5\\-3\end{pmatrix}, \sqrt{34},\ 329.03°$ (b) $\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}, \sqrt{13}, 56.3°$ 7. शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।

8. x = 0, वा 4 9. शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।

अभ्यास 6.2

1, 2. शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।

3.(a) $\left(\frac{-3}{5}, \frac{-4}{5}\right)$ (b) $\left(\frac{2}{\sqrt{29}}, \frac{-5}{\sqrt{29}}\right)$ 4.(a) -7i – 6j, $\left(\frac{-7}{\sqrt{85}}, \frac{-6}{\sqrt{85}}\right)$ (b) i - 3j, , $\left(\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{-3}{\sqrt{10}}\right)$

5. (a) 0 (b) 2 6. (a) $\overrightarrow{SR}$ (b) $\overrightarrow{RT}$ (c) $\overrightarrow{PS}, \overrightarrow{ST}$

(d) $\overrightarrow{SP}, \overrightarrow{RQ}$ (e) $\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{SR}$ (f) $\overrightarrow{RT}, \overrightarrow{QS}$

7.(a) असमान (b) समान 8. शिक्षकलाई देखाउनुहोस् । 9. (a) (0, 5) (b) x = 0,y = 1

10. शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।

अभ्यास 6.3

1. (a) (12,-6) (b) (2, -1) (c) (6, -3) 2. शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।

3. -4 4. (a) (-2, 6) (b) (4, -2) (c) (-4, 2) (d)(-1, 8)

(e) (9,-2) (f) (-4, 7)

5. (a) (17, 11) (b) (5, -3) (c) (-3, 1)

6. (-3, 8), (5, 0) 7. शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।

8. (a) $\overrightarrow{AC}$ (b) $\overrightarrow{DC}$ (c)$\overrightarrow{DA}$ (d) $\overrightarrow{AO}$ 9. (-3, 8)

10. (a) (-2, 5) (b) $2\vec{j} - 3\vec{j}$ (c) $-2\vec{a} + 8\vec{b}$ (d) (11, 11)

11. शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।

12. (a) $\vec{a} + \vec{b}$ (b) $2\vec{b}$ (c)$2\vec{b} - \vec{a}$ (d) $\vec{b} - \vec{a}$

13-16 शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।

अभ्यास 7.1

1, 2 शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।

3. (a) A' (1,-1), B' (-3,0), C' (4, -2) D' (-5, 3), E(2, 3)

(b) A' (-1, 1), B' (3, 0), C'(-4, 2), D' (5, -3), E'(-2, -3)

(c) A' (1, 1), B'(0,-3), C' (2, 4), D' (-3, -5), E' (-3, 2)

(d) A' (-1, -1), B'(0, 3), C'(-2, -4), D'(3,5), E'(3,-2)

(e) A' (-7, 1), B' (-3, 0), C' (-10,2), D'(-1, -3), E(-8, -3)

(f) A'(1, 9), B'(-3, 10), C' (4, 8), D'(-5, 13), E (2, 13)

4. (a) A'(0.-2), B'(2, 6), C'(3, 5) (b) A'(10, 0), B' (2. 2), C'(3. 3)

(c) A' (-2,-4), B' (6, -6), C'(5 - 7) लेखाचित्र शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।

5. (a) P' (-3, 1), Q(1, 3), R'(4,-3), S'(-1, -2)

(b) P'(3,3), Q' (-1, -1), R'(5, -4), S' (4, 1) लेखाचित्र शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।

6. (a) $y = -x$ (b) $x = 3$ (c) y – अक्ष (d) $y = -2$

7. A' (-2, 3), B' (-3, 2), C' (-1, 1), A" (-4, 3), B"(-3, 2). C" (-5, 1) लेखाचित्र शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।

8. Y(2, 8), Z(-4, -8), $y = -x$ 9. शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।

अभ्यास 7.2.

1, 2 शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।

3. (a) P'(-5, 7), Q'(-4, -3), R'(3, -1), S'(3, 6), T'(-7, -4)

(b) P'(5,-7, Q'(4, 3), R'(3,1), S'(-3, -6), T'(7, 4)

(c) P'(-7,-5), Q (3, -4), R'(1, 3), S'(-6, 3), T'(4, -7)

(d) P'(7, 5), Q'(3, 4), R' (-1, -3), S'(6, -3), T' (-4, 7)

4. (a) A'(0, 1), B'(5, -4), C'(-2, -7) (b) A'(-1, 0), B'(-4, -5), C'(-7, 2)

(c) A'(0,-1), B'(-5, 4), C'(2, 7)

5. A(-3, -7), B' (-1,1), C'(-6, -8)

6. A'(1, -2), B'(1, -5), C' (4, -4), D'(4, -1)

7. (a) 180° (b) +90° (c) -90° (d) 360°

8. (a) A' (2, 5), B'(-1, 3), C'(4, 2), A"(-2, -5), B"(1, -3), C"(-4, -2)

(b) P'(-7, 4), Q'(-2, 6), R'(-5, -5), P"(4, 7), Q"(6, 2), R"(-5, 5)

9. शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।

अभ्यास 7.3

1, 2 शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।

3. (a) A' (1,1) (b) B'(4, -4) (c) C'(7, 4) (d) D'(-2, -6) (e) E'(9, 0)

4. P'(5, 5), Q' (1, 6), R'(7, 0)

5. (a) A' (-3, 0) (b) B'(3, 5) (c) C'(3. 5)

6. (a) (2, -3) (b) (-7, -12), (-3, -11) (c) a = -1, b = -1, (-6, 3)

7. A'(3, 2), B'(0, 5), C' (5, 6) लेखाचित्र शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।

8. P'(4, -2), Q'(0, -1), R'(5, -5) लेखाचित्र शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।

9. (-4, 1); A'(-3, 9), B' (-7,10),C'(-4, 14), D'(0, 13)

10. A'(-3, 4), B' (4, -4), C' (2, 0), A" (-5, 7), B" (2, -1), C"(0, 3)

11, 12 शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।

अभ्यास 7.4

1, 2, 3 शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।

4. (a) A' (8, 10), B' (6, 0), C'(-4, 6), D' (-10,0) E' (-6, -4)

   (b) A'(-12, - 15), B'(-9, 0), C(6, -9), D'(15, 0) E(9, 6)

   (c) A'$(6, \frac{15}{2})$, B'$(\frac{9}{2}, 0)$, C'$(-3, \frac{9}{2})$, D'$(\frac{-15}{2}, 0)$ E$(-\frac{9}{2}, -3)$

   (d) A'$(\frac{-4}{3}, \frac{-5}{3})$ B'(-1, 0), C'$(\frac{2}{3}, -1)$, D'$(\frac{5}{3}, 0)$, E'$(1, \frac{2}{3})$

   (e) A' (5, 12), B'(3, 2) C' (-7, 8), D'(-13, 2), E (-9, -2)

   (f) A' (-9, -20), B'(-7, 0), C'(13, -12), D'(25,0), E' (17,8)

   (g) A'$(-11, \frac{-25}{2})$, B' $\left(\frac{-18}{2} - 5\right)$, C' $\left(-2, \frac{18}{2}\right)$, D'$\left(\frac{5}{2}, 5\right)$, $E'\left(\frac{-1}{2}, -2\right)$

5. A' (8, -4), B'(6, 2), C' (4, 10)

6. P' (3, 11), Q' (1, 3), R(-1, 5), S'(1, 13)

7. (a) E[O,-2], (b)E [O, 3], (c) E[(2, 1), 2] (d) E[(1, 2), 2]

8. (a) a = 3, b= 6 (b) a= 3, b = -2

9, 10 शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।

अभ्यास 8.1

1. सबै उत्तरहरू शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।

2. (a) Q_1= 6 औँ पद = 5

   Q_2 = 12 औँ पद = 9

   Q_3 = 18 औँ पद = 12

   (b) Q_1 = 4 औँ पद = 15

   Q_2 = 8 औँ पद = 20

   Q_3 = 12 औँ पद = 25

3. (a) Q_1 = 35 Q_3 = 55 (b) Q_1 = 25 Q_3 = 35

4. (a) D_1 = 19, D_4 = 28, D_8 = 52 (b) D_2 =22, D_7 = 63 (c) D_5 = 55, D_6 =55

   (d) D_4 = 15, D_9 = 30

5. (a) P_{40} = 23, P_{90} = 63 (b) P_{32} = 20, P_{85} = 35

अभ्यास 8.2

1. सबै उत्तरहरू शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।

2. (a) 3, 0.2 (b) 10.5cm, 0.28 (c) Rs. 9 , 0.07
   (d) 5.5mm, 0.407 (e) 2.75 kg, 0.423

3. (a) रु. 3, 0.25 (b) 5mm, 0.17 (c) 7.5 , 0.142
   (d) 12.5, 0.10 (e) 2cm, 0.143

4. (a) 5, 0.1 (b) 75, 0.36 (c) 30 (d) 9, 3 (e) 3a, 0.5

5. (a) 7.09, 7.09 (b) 6.42, 6.22, 0.38 (c) 4, 3.48, 0.12, 0.31
   (d) Rs. 6181.82 (e) 3.4, 0.283

6. (a) 3.15, 0.15; 3.16, 0.16 (b) 4.5, 0.15; 4.75, 0.16
   (c) 0.9, 0.3 (d) 11.06, 0.19; 11.25, 0.19
   (e) 2.32, 0.331, 2.97, 0.57

अभ्यास 8.3

1. सबै उत्तरहरू शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।

2. (a) 14.14, 0.47, 47% (b) 1.72, 0.23, 22.93%
   (c) 18.65, 0.27 27% (d) 28.72, 0.34 , 34%
   (e) 7.05, 0.24, 24% (f) 6.5 , 0.18 18%

3. (a) 9.6 (b) 12.29 (c) 1.61

4 (a) 12.33, 0.43, 43.1% (b) 1.61, 0.013, 1.3%
   (c) 1.57, 0.118, 11.83% (d) 19.7, 0.35, 34.8%
   (e) 9.73, 0.41, 41%

5. शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।